Оглавление

1. Введение

Данное пособие представляет собой сокращённый вариант конспектов лекций [2] по семестровому факультативному курсу «Геометрические методы в классической теории поля». При этом опущены практически все темы, связанные с общей теорией относительности (ОТО), и основной акцент перенесён на электродинамику, что должно приблизить пособие к широким студенческим массам. Однако «дух ОТО» как теории в существенной степени геометрической всё равно здесь присутствует, что не должно удивлять: фактически в современной физике есть два несводимых друг к другу «больших стиля»: стиль ОТО и квантовый стиль (на сегодня — стиль квантовой теории поля).

Все темы пособия выбраны так, чтобы представлять интерес для человека, изучающего современную теоретическую физику, хотя во многих случаях физические приложения излагаемого формализма даются лишь в виде «намёка».

Многие определения приведены в двух эквивалентных формулировках, одна из которых обычно дана на языке компонент, а другая — на инвариантном языке. В таких случаях оба определения имеют одинаковый номер, но один из номеров отмечается штрихом. Читатель может свободно опускать любое из двух определений (особенно при первом чтении).

Многие разделы пособия также могут быть пропущены. При этом выбор изучаемых разделов зависит от интересов читателя.

Непонятные места данного пособия можно попытаться прояснить по книге [1], а более подробную библиографию можно найти в вводной лекции конспектов [2].

2. Дифференцируемое многообразие

Понятие многообразия обобщает впервые математически описанный Гауссом процесс картографирования земной поверхности: пространство покрывается картами (локальными системами координат), в областях пересечения карт устанавливаются однозначные правила перехода. Набор карт образует атлас. Очевидно, что мы не можем непрерывно и взаимно однозначно отобразить на плоскость даже поверхность земли (сферу с точки зрения топологии), поэтому нам и бывает нужен атлас, содержащий несколько карт.

Определение 1. Пусть множество $\mathbf{M}$ является объединением некоторого конечного или счётного набора множеств U_i, причём для каждого U_i задана функция $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство, образ $f_i(U_i)$ — открытая область в $\mathbb{R}^n$, функция f_i задаёт локальные координаты на U_i). Пусть U_{ij} — пересечение U_i и U_j.
Пусть

$$F_{ij} = f_i \circ f_j^{-1} : f_j(U_{ij}) \to f_i(U_{ij})$$

— взаимно однозначная функция определённого класса гладкости K (например, C^2 или C^∞) с якобианом, отличным от нуля.

Здесь f_j^{-1} — функция, обратная к f_j. Кружок ($\circ$) обозначает, что левая функция действует на аргумент правой.

Тогда $\mathbf{M}$ называется *гладким дифференцируемым многообразием класса гладкости K*.

Определение 2. Области U_i с заданными на них функциями f_i из предыдущего определения называются *картами*, а весь набор таких областей — *атласом*.

При первом прочтении обычно не ясно, почему гладкость определяется таким неочевидным образом, однако следует помнить, что само по себе пространство $\mathbf{M}$, не оснащённое картами, не имеет топологии. Поэтому мы не можем говорить о гладкости или непрерывности функций f_i. Однако пространство $\mathbb{R}^n$ имеет естественную топологию, для него определены классы гладкости, а функции F_{ij} как раз отображают одну область в $\mathbb{R}^n$ на другую. Впрочем, после того как на $\mathbf{M}$ введена структура многообразия, $\mathbf{M}$ приобретает топологию и дифференцируемость, которые наследуются у пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. определяются с помощью координат.

Отметим, что всегда можно ввести такой атлас, в котором всякая координатная окрестность U_i отображалась бы функцией f_i на всё пространство $\mathbb{R}^n$ (например, тангенс растягивает открытый отрезок $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ на всю прямую). Это делает глобальные свойства многообразий неочевидными. Если, например, мы решили для каких-то координат уравнения Эйнштейна и нашли решение для всех значений координат, то это ещё не значит, что мы описали всё пространство-время, на самом деле это лишь одна карта, за пределами которой решение может иметь продолжение.

Задача 1. Рассмотрим 2-мерную сферу. Введём на ней атлас из двух карт, проецируя её поверхность на плоскость, пересекающую сферу в экваториальной плоскости из северного и южного полюсов. Какие области будут покрыты этими картами? Какие функции будут описывать переход от одной карты к другой?

Задача 2. Рассмотрим тор (квадрат, у которого склеены противоположные стороны). Какое минимальное количество карт содержит атлас тора?

Замечание 1. В Задаче 1 сфера рассматривается как поверхность в 3-мерном пространстве $\mathbb{R}^3$, но это совсем не обязательно. Существование внешнего пространства, в которое погружено многообразие, нигде не предполагается. Так, пространство-время в ОТО искривлено, но это не значит, что оно погружено в некое плоское пространство большей размерности.

3. Тензоры

Сначала вспомним определения скаляров, векторов, ковекторов и тензоров на дифференцируемом многообразии.

Хотя дифференцируемое многообразие определяется с использованием координатных окрестностей (карт), дифференциальная геометрия на многообразии строится так, чтобы её утверждения не зависели от вводимой системы координат. Поэтому в качестве исходного берётся понятие скаляра.

Здесь и далее будет предполагаться непрерывность и дифференцируемость всех величин (достаточная, чтобы определяемые объекты имели смысл, но не большая, чем класс гладкости K, заданный при определении дифференцируемого многообразия).

Определение 3. *Скаляр* φ (скалярная функция на многообразии $\mathbf{M}$) — гладкая вещественная функция на многообразии, т.е. $\varphi : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$, или (в другой записи) $\varphi : a \mapsto \varphi(a) \in \mathbb{R}$, где $a \in \mathbf{M}$ (т.е. каждой точке $a \in \mathbf{M}$ ставится в соответствие одно вещественное число $\varphi(a) \in \mathbb{R}$).

Таким образом, скаляр φ ставит в соответствие *точкам пространства* $\mathbf{M}$ вещественные числа, а значит, от координат скаляр не зависит. Поэтому окончательный ответ, соответствующий измеряемой величине в физической задаче, должен быть скаляром. При этом подразумевается, что условия задачи должны включать какое-то описание прибора. Например, сила является вектором, но показания динамометра — скаляры, которые могут быть вычислены, если известно, на какие направления сила проецируется механизмом динамометра.

Однако, чтобы различать точки пространства $\mathbf{M}$, мы используем координаты, поэтому на каждой координатной окрестности U_i можно ввести функцию $\varphi(X)$, аргументами которой являются уже не сами точки многообразия, а их координаты $X \in \mathbb{R}^n$. Конечно, это не слишком корректно с точки зрения строгого математика, получается, что мы обозначили одной буквой две разные функции: аргументом одной из них является точка, а аргументом второй — набор координат точки.

В некоторых случаях нам встретятся выражения типа $\varphi(a)$, где $a \in \mathbf{M}$, а в других — $\varphi(X)$, где $X \in \mathbb{R}^n$. Первое выражение представляет собой бескоординатную запись, а второе — запись скалярной функции в определённой системе координат.

Определение 3′. *Скалярная функция* (представленная в определённой системе координат) — это функция, которая преобразуется при замене координат $X'(X)$ следующим образом:

$$\phi(X) \to \phi'(X') = \phi(X(X')),$$

где $X(X')$ — обратная замена. Здесь и далее предполагается, что якобиан $\frac{DX'}{DX}$ не равен нулю.

В последней формуле скаляр в штрихованной системе несёт штрих, но далее, в большинстве случаев, этот штрих будет опускаться.

Другие геометрические объекты также могут записываться в бескоординатной или координатной (компонентной) форме. Каждая форма имеет свои преимущества, но для практических выкладок обычно рано или поздно приходится переходить к компонентной записи.

Определение 4. *Векторное поле* v — это оператор, который действует на скалярную функцию φ и превращает её в другую скалярную функцию $v[\varphi]$, которая называется *производной по направлению* v от скалярной функции φ. Операция v должна удовлетворять следующим условиям:
1) линейность: $v[\alpha\phi + \beta\psi] = \alpha\, v[\phi] + \beta\, v[\psi]$, где $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, а ϕ и ψ — скалярные поля,
2) правило Лейбница: $v[\phi\psi] = \psi\, v[\phi] + \phi\, v[\psi]$,
3) непрерывность: для всякого ϕ и для всякого $\delta > 0$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для всякого ψ, такого, что $|\phi - \psi| < \varepsilon$ и $\left|\frac{\partial}{\partial X^m}(\phi - \psi)\right| < \varepsilon$, будут выполняться условия $|v[\phi - \psi]| < \delta$ и

$\left|\frac{\partial}{\partial X^m} v[\phi - \psi]\right| < \delta$. ε и δ не зависят от X, а неравенства выполняются для всех X при всех $m = 1, \ldots, n$. (Далее подобная непрерывность предполагается для всех функционалов.)

Определение 4$'$. *Векторное поле* (*контравариантное векторное поле, контравекторное поле, или просто (контравариантный) вектор*) v — это набор функций $v^m(X)$, $m = 1, \ldots, n$ преобразующихся при замене координат $X'(X)$ по следующему закону:

$$v^m(X) \to v^{m'}(X') = v^m(X(X'))\frac{\partial X^{m'}}{\partial X^m}(X(X')).$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование по всему диапазону $1, \ldots, n$ (если какой-то индекс не учитывается, то мы будем его подчёркивать), т.е. в предыдущей формуле подразумевается $v^{m'} = \sum_{m=1}^{n} v^m \frac{\partial X^{m'}}{\partial X^m}$.

Определение 5. Суммирование по паре одинаковых индексов называется *свёрткой.*

Определение 6. Повторяющийся индекс, по которому проводится суммирование, называется *немым индексом.*

Определение 7. Индекс, по которому суммирование не производится, называется *свободным индексом.*

При преобразовании векторных полей аргументы всех функций преобразуются так, как преобразуются аргументы скаляров, поэтому далее мы будем их опускать, имея в виду, что они всегда могут быть выписаны исходя из того, что все величины относятся к одной точке многообразия. Обратите внимание, что штрихи оказывается удобным ставить не на сами координаты, а на индексы.

Два определения векторного поля связаны между собой следующими соотношениями:

$$v = v^m \frac{\partial}{\partial X^m}, \quad v[\phi] = v^m \frac{\partial}{\partial X^m}\phi, \quad v^m = v[X^m].$$

В последнем соотношении вектор v действует на скалярную функцию X^m, значение которой совпадает со значением координаты X^m в данной точке.

Определение 8. Дифференциальные операторы вида $\partial_m = \frac{\partial}{\partial X^m}$ образуют *координатный базис* для векторов.

Определение 9. *Ковекторное поле* u — это поле линейной формы на контравекторах, т.е. это операция, которая ставит в соответствие векторному полю v скалярное поле $\langle u, v\rangle$. Операция u должна удовлетворять следующим условиям:
1) линейность: $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а v и w — векторные поля,
2) непрерывность в том же смысле, что и в определении векторного поля.

Определение 9′. *Ковекторное поле* (*ковариантное векторное поле, или просто ковектор*) u — это набор функций $u_m(X)$, $m = 1, \ldots, n$, преобразующихся при замене координат $X'(X)$ по следующему закону:

$$u_m(X) \to u_{m'}(X') = u_m(X(X'))\frac{\partial X^m}{\partial X^{m'}}(X').$$

Ковекторные поля преобразуются как градиенты. В бескоординатной записи градиент скалярной функции φ записывается как $d\varphi$. Он имеет компоненты $(d\varphi)_m = \partial_m\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial X^m}$. Легко видеть, что $\langle u, v\rangle = u_m v^m \Rightarrow \langle d\varphi, v\rangle = v[\varphi] = v^m\,\partial_m\varphi$.

Определение 10. Градиенты координат dX^m образуют *координатный базис* для ковекторов.

Причём

$$\left\langle dX^k, \partial_m \right\rangle = \delta^k_m = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}.$$

Теперь легко записать связь бескоординатной и координатной записи ковекторов:

$$u = u_m\, dX^m, \qquad u_m = \langle u, \partial_m\rangle\,.$$

Замечание 2. Надо соблюдать *баланс индексов*:

- в каждом слагаемом индекс может встречаться один или два раза;
- если индекс встречается в слагаемом один раз (свободный индекс), то
  - слагаемое зависит от значения этого индекса,
  - мы можем приравнять этот индекс какому-то значению,
  - все члены, с которыми слагаемое складывается, вычитается или приравнивается, должны содержать этот индекс тоже один раз в том же (верхнем или нижнем) положении,
  - мы можем переименовать этот индекс, если одновременно таким же образом переименуем этот индекс во всех членах, с которыми данное слагаемое складывается, вычитается или приравнивается;
- если индекс встречается в слагаемом два раза (немой индекс), то
  - один раз он должен быть верхним, а другой раз — нижним,
  - по нему проводится свёртка,
  - мы не можем приравнять этот индекс какому-то значению,
  - мы можем переименовать этот индекс произвольным образом, но так, чтобы новое имя индекса не совпадало с именами других индексов того же слагаемого;
- мы можем не различать верхние и нижние индексы, *только если* ограничиваем себя рассмотрением преобразований, для которых матрица Якоби $(\frac{\partial X^{k'}}{\partial X^k})$ ортогональна, т.е.

$$\frac{\partial X^{k'}}{\partial X^k}\frac{\partial X^{m'}}{\partial X^m}\delta_{k'm'} = \delta_{km} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial X'}{\partial X} \in \mathrm{O}(n);$$

- мы должны различать индексы, относящиеся к разным системам координат (штрихованные и нештрихованные);

- если вы подставляете какое-то выражение с индексами в формулу, то часто бывает *необходимо* переименовать некоторые индексы:
  - индексы, встречающиеся один раз, бывает нужно переименовать, чтобы они соответствовали индексам в формуле, в которую вы подставляете выражение;
  - индексы, встречающиеся два раза, бывает нужно переименовать, чтобы они не совпадали с индексами, уже имеющимися в члене, в который вы подставляете выражение.

Приведённые выше (в Замечании 2) правила обращения с индексами тривиальны, но часто недостаточно чётко осознаются начинающими, что приводит к ошибкам, которых можно было бы легко избежать.

Пример 1. Проиллюстрируем теперь Замечание 2 конкретным примером. Докажем, что свёртка $u_i v^i$ ковектора u и вектора v является скаляром. При замене координат компоненты u и v преобразуются следующим образом:

$$u_{k'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{k'}}, \qquad v^{m'} = \frac{\partial X^{m'}}{\partial X^j} v^j.$$

Чтобы подставить компоненты u и v в штрихованных координатах в выражение $u_{i'} v^{i'}$, сначала следует переименовать в исходных выражениях свободные индексы k' и m' в i':

$$u_{i'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{i'}}, \qquad v^{i'} = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^j} v^j.$$

Если мы подставим в свёртку эти выражения, то индекс j войдёт в один член четыре раза, поэтому перед подстановкой надо

переименовать индекс j в одном из выражений, например, в выражении для $v^{i'}$ заменим j на k и получим $v^{i'} = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^k} v^k$.
Теперь подставим $u_{i'}$ и $v^{i'}$ в исходное выражение:

$$u_{i'} v^{i'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{i'}} \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^k} v^k = u_j \delta^j_k v^k = u_j v^j = u_i v^i.$$

(В самом конце цепочки равенств мы переименовали немой индекс j в i просто «для красоты».)

Определение 11. *Тензорное поле* T *типа* (p,q) — это непрерывное (аналогично Опр. 2) линейное по всем своим аргументам отображение p ковекторов $u^1, \ldots, u^p$ и q векторов $v_1, \ldots, v_q$ на скаляр $T[u^1, \ldots, u^p; v_1, \ldots, v_q]$.

Определение 11′. *Тензорное поле* T *типа* (p,q) — это набор функций $T^{k_1 \ldots k_p}{}_{m_1 \ldots m_q}(X)$, $k_i, m_i = 1, \ldots, n$, преобразующихся при замене координат $X'(X)$ по следующему закону:

$$\begin{aligned} T^{k_1 \ldots k_p}{}_{m_1 \ldots m_q} \to T^{k'_1 \ldots k'_p}{}_{m'_1 \ldots m'_q} = \\ = T^{k_1 \ldots k_p}{}_{m_1 \ldots m_q} \frac{\partial X^{k'_1}}{\partial X^{k_1}} \cdots \frac{\partial X^{k'_p}}{\partial X^{k_p}} \frac{\partial X^{m_1}}{\partial X^{m'_1}} \cdots \frac{\partial X^{m_q}}{\partial X^{m'_q}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Тензор типа $(0,0)$ — скаляр, типа $(1,0)$ — вектор, типа $(0,1)$ — ковектор.

Определения 11 и 11′ связаны друг с другом соотношениями

$$T[u^1, \ldots, u^p; v_1, \ldots, v_q] = T^{k_1 \ldots k_p}{}_{m_1 \ldots m_q} u^1_{k_1} \ldots u^p_{k_p} \, v_1^{m_1} \ldots v_q^{m_q},$$

$$T^{k_1 \ldots k_p}{}_{m_1 \ldots m_q} = T[dX^{k_1}, \ldots, dX^{k_p}; \partial_{m_1}, \ldots, \partial_{m_q}].$$

Определение 12. *Тензорное произведение* тензора T типа (p,q) и тензора S типа (r,s) — это тензор $T \otimes S$ типа $(p+r, q+s)$, такой, что $(T \otimes S)[u_1, \ldots, u_{p+r}; v_1, \ldots, v_{q+s}] = T[u_1, \ldots, u_p; v_1, \ldots, v_q] S[u_{p+1}, \ldots, u_{p+r}; v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}]$.

Определение 12′. *Тензорное произведение* тензора T типа (p,q) с компонентами $T^{k_1 \ldots k_p}{}_{m_1 \ldots m_q}$ и тензора S типа (r,s) с компонентами $S^{l_1\dots\, l_r}{}_{n_1\dots\, n_s}$ — это тензор $T\otimes S$ типа $(p{+}r,\ q{+}s)$ с компонентами

$$(T\otimes S)^{k_1\dots\, k_p}{}_{m_1\dots\, m_q}{}^{l_1\dots\, l_r}{}_{n_1\dots\, n_s} = T^{k_1\dots\, k_p}{}_{m_1\dots\, m_q} S^{l_1\dots\, l_r}{}_{n_1\dots\, n_s}.$$

Тензор $T(a)$ типа (p,q) принадлежит к n^{q+p}-мерному линейному пространству с базисом $\partial_{k_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{k_p}\otimes dX^{m_1}\otimes\ldots\otimes dX^{m_q}$.

Мы можем умножать тензор на число и складывать тензоры одинакового типа. Любой верхний индекс тензора типа (p,q) можно свернуть с любым нижним, получившийся при этом объект будет тензором типа $(p-1,\ q-1)$.

Помимо тензорных полей разных типов можно аналогично определить тензоры, заданные на различных подмножествах $\mathbf{M}$: областях, (гипер)поверхностях, кривых, дискретных наборах точек.

4. Метрика

Определение 13. *Метрика* — тензор типа (0, 2) с компонентами g_{km}, для которого выполняются условия
1) $g_{km} = g_{mk}$ — *симметричность*,
2) $\det(g_{km}) \neq 0$ — *невырожденность*.
В бескоординатной записи метрика записывыается как
$ds^2 = g_{km}\, dx^k\, dx^m$.

Определение 14. *Обратная метрика* — тензор типа (2, 0) с компонентами g^{jk}, для которого $g^{jk}g_{km} = \delta^j_m$.

Задача 3. Показать, что обратная метрика действительно является тензором типа (2, 0).

Определение 15. Метрика называется *римановой*, если для любого вектора $v \neq 0$ выполняется условие $g_{km}v^k v^m > 0$.

Определение 16. Если существуют векторы $v \neq 0$ и $u \neq 0$, такие, что $g_{km}v^k v^m > 0$, а $g_{km}u^k u^m < 0$, то метрика называется *псевдоримановой* (такова метрика пространства-времени).

Определение 17. При наличии метрики любой верхний индекс можно *опустить*, а любой нижний — *поднять*:

$$T^{\dots k \dots}{}_{\dots} g_{km} = T^{\dots}{}_{m}{}^{\dots}{}_{\dots}, \qquad T^{\dots}{}_{\dots j \dots} g^{jk} = T^{\dots}{}_{\dots}{}^{k}{}_{\dots}.$$

Поэтому тензоры лучше писать так, чтобы при поднимании/опускании индексов всегда было ясно, в каком порядке они идут.

Ясно, что метрику можно выбрать разными способами, при этом поднимание/опускание индексов будет приводить к разным результатам, поэтому если метрик несколько, надо всегда аккуратно оговаривать, какая из них используется в каждом случае. Впрочем, *в некоторых случаях можно обходиться вообще без метрики*, как мы и поступим в ряде последующих разделов.

5. Коммутатор и производная Ли

При первом чтении этот раздел можно опустить.

Заметим, что хотя тензоры одного типа в разных точках многообразия «устроены одинаково», *естественного* (т.е. физически или геометрически предпочтительного) взаимно однозначного соответствия между тензорами, заданными в разных точках многообразия, может не существовать. Это затрудняет дифференцирование, поскольку для взятия производной по направлению надо вычитать друг из друга тензоры в разных (хотя и бесконечно близких) точках. (Поэтому частные производные от компонент тензора нового тензора не образуют, если исходный тензор не был скаляром.) Учитывая то, что и тензоры (кроме скаляров) в разных точках принадлежат разным пространствам, задача дифференцирования тензоров сводится к задаче их переноса в бесконечно близкие точки.

Производная Ли обобщает на тензоры понятие производной вдоль векторного поля, которое было введено выше для скаляра ($v[\phi]$). Заметим, что такое обобщение не единственно, так *ковариантная производная* тоже обобщает на тензоры (но иначе) понятие производной по направлению.

Определение 18. Производная Ли вдоль векторного поля v от тензора T типа (p,q) (обозначается L_vT) представляет собой снова тензор типа (p,q), причём производная Ли от скаляра и вектора задаётся как

$$L_v\varphi = v[\varphi] = v^m\,\partial_m\varphi, \qquad (L_vw)^m = v^k\,\partial_k w^m - w^k\,\partial_k v^m,$$

выполняется правило Лейбница относительно тензорного произведения

$$L_v(T\otimes S) = (L_vT)\otimes S + T\otimes(L_vS),$$

производная Ли перестановочна со свёрткой, т.е., если $S^{\cdots}{}_{\dots} = T^{\cdots\,k}{}_{\dots\,k}$, то $(L_vS)^{\cdots}{}_{\dots} = (L_vT)^{\cdots\,k}{}_{\dots\,k}$.

Задача 4. Показать, что

$$L_vT^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q} = v^s\partial_sT^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q} + T^{k_1\dots k_p}{}_{s\dots m_q}\partial_{m_1}v^s\dots +$$
$$+T^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots s}\partial_{m_q}v^s - T^{s\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q}\partial_s v^{k_1}\dots - T^{k_1\dots s}{}_{m_1\dots m_q}\partial_s v^{k_p}. \tag{2}$$

Замечание 3. Отдельные члены в формуле (2), как правило, не являются тензорами.

Остановимся подробнее на производной Ли от вектора. Выражение L_vw отличается от L_wv только знаком. Можно записать следующее равенство:

$$L_vw = [v,w] = v\circ w - w\circ v. \tag{3}$$

Определение 19. Выражение (3) определяет *коммутатор векторных полей v и w.*

Чтобы прояснить выражение $v\circ w - w\circ v$, вспомним представление векторов в виде дифференциальных операторов:

$$[v,w]\varphi = v\circ w\,\varphi - w\circ v\,\varphi = v[w[\varphi]] - v[w[\varphi]].$$

То, что коммутатор двух векторных полей снова является векторным полем, означает, что дифференциальный оператор $v \circ w - w \circ v$ не содержит производных второго порядка.

Нетрудно проверить, что для коммутатора выполняются следующие три свойства:
1) $[v, w] = -[w, v]$ — антисимметричность,
2) $[u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w]$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — линейность (с учётом антисимметрии — билинейность),
3) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ — тождество Якоби.

Замечание 4. Если учесть, что операция $[u, v]$ может рассматриваться, с одной стороны, как дифференцирование v вдоль u, а с другой, — как антисимметричное умножение, то тождество Якоби выступает в роли правила Лейбница относительно коммутатора: $[u, [v, w]] = L_u[v, w] = [L_u v, w] + [v, L_u w] = [[u, v], w] + [v, [u, w]] = -[w, [u, v]] - [v, [w, u]]$.

Определение 20. Линейное пространство, на котором введена операция $[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющая свойствам 1), 2), 3), называется *алгеброй Ли*.

Таком образом, векторные поля на многообразии образуют алгебру Ли относительно операции взятия коммутатора.

Обратите внимание, что мы по-прежнему не вводили на многообразии никаких дополнительных структур!

6. Дифференциальные формы и поливекторы

В дифференциальной геометрии особую роль играют полностью антисимметричные тензоры. Отчасти это обусловлено их связью с поверхностями, вложенными в многообразие. Другая (возможно, главная) причина популярности таких тензоров — их простота.

Определение 21. Тензор A с компонентами $A_{m_1 \dots m_q}$ называется *полностью антисимметричным ковариантным тензором*, или *дифференциальной формой степени q* (иногда просто *формой*, или *q-формой*), если при перестановке любой пары индексов знак тензора меняется.

Определение 22. Тензор B с компонентами $B^{m_1\dots m_q}$ называется *полностью антисимметричным контравариантным тензором*, или *поливектором степени q*, если при перестановке любой пары индексов знак тензора меняется.

Минимальная степень дифференциальной формы (поливектора) — нуль, такая дифференциальная форма (и одновременно поливектор) — скаляр. Ковектор является дифференциальной формой степени один (вектор является поливектором степени один).

Очевидно, что отличные от нуля компоненты должны нумероваться наборами индексов без повторений. Отсюда, в частности, следует, что максимальная степень не равной нулю дифференциальной формы (поливектора) равна размерности многообразия.

6.1. Дифференциальные формы и поливекторы максимальной степени

Дифференциальная форма (поливектор) максимальной степени имеет только одну независимую компоненту и может быть записана как

$$A_{m_1\dots m_n} = a\,\varepsilon_{m_1\dots m_n} \qquad (B^{m_1\dots m_n} = b\,\varepsilon^{m_1\dots m_n})\,.$$

Здесь $\varepsilon_{m_1\dots m_n} = \varepsilon^{m_1\dots m_n}$ — полностью антисимметричный символ (не тензор!), который равен нулю, если среди его индексов присутствуют повторяющиеся, $+1$ — если индексы образуют чётную перестановку последовательности $1, 2, \dots, n$, и -1 — если индексы образуют нечётную перестановку.

Дифференциальная форма (поливектор) максимальной степени полностью определяется своей компонентой $A_{12\dots n}$ ($B^{12\dots n}$) (для символа ε имеем $\varepsilon_{12\dots n} = \varepsilon^{12\dots n} = +1$). Рассмотрим преобразование этой компоненты при замене координат:

$$A_{1'\dots n'} = a'\varepsilon_{1'\dots n'} = a\,\varepsilon_{m_1\dots m_n}\,\frac{\partial X^{m_1}}{\partial X^{1'}}\dots\frac{\partial X^{m_n}}{\partial X^{n'}}$$

$$\left(B^{1'\dots n'} = b'\varepsilon^{1'\dots n'} = b\,\varepsilon^{m_1\dots m_n}\,\frac{\partial X^{1'}}{\partial X^{m_1}}\dots\frac{\partial X^{n'}}{\partial X^{m_n}}\right).$$

Таким образом, $a' = a\,\frac{DX}{DX'}$ $(b' = b\,\frac{DX'}{DX})$ (вспомните определение определителя!).

То есть единственная (независимая) компонента формы максимальной степени при замене координат преобразуется по той же формуле, по которой преобразуется элемент объёма, т.е. умножением на обратный якобиан преобразования. Компоненты поливектора максимальной степени умножаются на прямой якобиан преобразования.

Это позволяет установить взаимно однозначное соответствие между дифференциальными формами и поливекторами максимальной степени (при условии, что и те и другие всюду отличны от нуля), положив $b = \frac{1}{a}$. Отметим, что для этого нам не понадобилась метрика.

6.2. (Анти)симметризация

Определения 23, 24. Для дальнейшей работы удобно ввести операции *антисимметризации* и *симметризации*:

$$A_{[m_q\dots m_q]} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma(m_1\dots m_q)}(-1)^{\Sigma(m_1\dots m_q)}A_{\sigma(m_1\dots m_q)},$$

$$A_{(m_q\dots m_q)} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma(m_1\dots m_q)}A_{\sigma(m_1\dots m_q)}.$$

Сумма берётся по всем перестановкам $\sigma(m_1\dots m_q)$ индексов $m_1\dots m_q$. Символ $\Sigma(m_1\dots m_q)$ обозначает чётность перестановки, т.е. сколько раз надо менять местами пары индексов, чтобы вернуться к исходному порядку.

Определения 23, 24 даны для ковариантных (нижних) индексов. Очевидно, точно так же можно определить (анти)симметризацию и для контравариантных (верхних). Однако все индексы, по которым проводится (анти)симметризация, должны быть одного типа.

Пример 2

$$A_{[klm]} = \frac{1}{3!}(A_{klm} + A_{lmk} + A_{mkl} - A_{lkm} - A_{kml} - A_{mlk}).$$

$A_{(klm)}$ отличается от $A_{[klm]}$ лишь тем, что все знаки будут плюсами.

Пример 3. $A_{[k}B_{l]} = \frac{1}{2}(A_k B_l - A_l B_k)$.

Утверждение 1

$$\begin{array}{ll} A_{[\ldots[\ldots]\ldots]} = A_{[\ldots\,\ldots\,\ldots]}, & A_{(\ldots[-]\ldots)} = 0, \\ A_{(\ldots(\ldots)\ldots)} = A_{(\ldots\,\ldots\,\ldots)}, & A_{[\ldots(-)\ldots]} = 0. \end{array}$$

Здесь точки обозначают произвольные (возможно пустые) наборы индексов одинаковые в левой и правой части равенства, а «$-$» обозначает набор из двух или более индексов.

Утверждение 2. Форма (поливектор) степени q на n-мерном многообразии имеет $C_n^q = \frac{n!}{q!\,(n-q)!}$ независимых компонент — это число способов, которыми можно выбрать из n возможных значений индекса неупорядоченный набор из q различных чисел.

Задача 5. Докажите Утверждение 1.

Задача 6. Докажите Утверждение 2.

Таким образом, q-формы и $(n-q)$-формы, а также поливекторы степени q и $(n-q)$ имеют одинаковое число независимых компонент, но преобразуются эти компоненты по разным законам. Однако, как будет показано далее, при наличии формы объёма можно естественным образом установить взаимно однозначное соответствие между q-формами и поливекторами степени $(n-q)$, а при наличии метрики различие между дифференциальными формами и поливекторами исчезает. Форма объёма и метрика могут быть введены разными способами, поэтому на данном этапе (до введения формы объёма и метрики) мы можем лишь установить взаимно однозначное соответствие между формами и поливекторами максимальной степени.

При свёртке набора антисимметричных индексов полезно ввести следующие обозначения:

$$A^{i\dots\lfloor l_1\dots l_k\rfloor j\dots}{}_{m\dots\lfloor l_1\dots l_k\rfloor s\dots} = \frac{1}{k!}A^{i\dots l_1\dots l_k j\dots}{}_{m\dots l_1\dots l_k s\dots}. \qquad (4)$$

Если тензор антисимметричен как по верхним, так и по нижним сворачиваемым индексам, можно вести суммирование по индексам, заключённым в скобках $\lfloor\,\rfloor$, используя только упорядоченные наборы индексов и *не деля на* $k!$, это связано с тем, что разные наборы индексов $l_1\dots l_k$, отличающиеся лишь порядком индексов, дают одинаковый вклад в сумму.

Дифференциальные (поливекторы) формы можно разлагать по введённому ранее n^q-мерному базису, тогда бескоординатная запись оказывается связанной с координатной формулами:

$$\begin{aligned} A &= A_{m_1\dots m_q}\, dX^{m_1}\otimes\dots\otimes dX^{m_q}, \qquad (5)\\ B &= B^{m_1\dots m_q}\,\partial_{m_1}\otimes\dots\otimes\partial_{m_q}. \qquad (6)\end{aligned}$$

Однако при $q>1$ данные базисы являются избыточными, более того, ни один из базисных тензоров $dX^{m_1}\otimes\dots\otimes dX^{m_q}$ ($\partial_{m_1}\otimes\dots\otimes\partial_{m_q}$) не является дифференциальной формой (поливектором), т.к. не антисимметричен. Наконец, в суммах (5), (6) каждая независимая компонента повторяется $q!$ раз, поэтому оказывается удобным для дифференциальных форм и поливекторов ввести специальные C_n^q-мерные базисы, в которых

$$\begin{aligned} A &= A_{\lfloor m_1\dots m_q\rfloor}\, dX^{\lfloor m_1}\wedge\dots\wedge dX^{m_q\rfloor}, \qquad (7)\\ B &= B^{\lfloor m_1\dots m_q\rfloor}\,\partial_{\lfloor m_1}\wedge\dots\wedge\partial_{m_q\rfloor}, \qquad (8)\end{aligned}$$

где

$$dX^{m_1}\wedge\dots\wedge dX^{m_q} = q!\, dX^{[m_1}\otimes\dots\otimes dX^{m_q]}, \qquad (9)$$

$$\partial_{m_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{m_q} \quad = \quad q!\, \partial_{[m_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{m_q]}. \qquad (10)$$

Определение 25. Формулы (9), (10) определяют операцию «$\wedge$» — *внешнее произведение* дифференциальных форм для базисных форм $dX^{m_1} \wedge \ldots \wedge dX^{m_q}$ и поливекторов $\partial_{m_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{m_q}$, а значит, и для произвольных форм и поливекторов (но ни в коем случае не внешнее произведение поливекторов и форм!).

Впрочем, такое определение не всегда удобно для практического применения.

6.3. Внешнее произведение и внешняя производная

Определение 25$'$. *Внешним произведением* $A \wedge B$ тензоров (дифференциальных форм) A и B с компонентами $A_{m_1 \ldots m_q}$ и $B_{n_1 \ldots n_p}$ называется тензор с компонентами

$$(A \wedge B)_{m_1 \ldots\, m_q n_1 \ldots\, n_p} = \frac{(q+p)!}{q!\, p!} A_{[m_1 \ldots\, m_q} B_{n_1 \ldots\, n_p]}.$$

Внешнее произведение поливекторов определяется аналогично с заменой нижних индексов на верхние.

Утверждение 3. Если вспомнить множитель $\frac{1}{(q+p)!}$, который возникает при антисимметризации, и то, что через каждый независимый член A (B) выражается $q!$ ($p!$) компонент (отличающихся порядком индексов), то можно увидеть, что в окончательных формулах все числовые коэффициенты становятся равными ± 1.

Пример 4. Внешнее произведение двух 1-форм (ковекторов): $A \wedge B = A \otimes B - B \otimes A$, $(A \wedge B)_{km} = A_k B_m - A_m B_k$.

Пример 5. Внешнее произведение 1-формы A и 2-формы B: $(A \wedge B)_{klm} = A_k B_{lm} + A_l B_{mk} + A_m B_{kl}$.

Утверждение 4. Если A — q-форма, а B — p-форма, то

$$A \wedge B = (-1)^{qp}\, B \wedge A.$$

Пример 6. Пусть $F = dt \wedge dx + dy \wedge dz$, где $t,\ x,\ y,\ z$ — координаты в 4-мерном пространстве, тогда

$$F \wedge F = 2\, dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Если F — тезор электромагнитного поля, то (см. (30))

$$\begin{aligned} F &= E_x\,dt\wedge\,dx + E_y\,dt\wedge\,dy + E_z\,dt\wedge\,dx + \\ &\quad + H_x\,dy\wedge\,dz + H_y\,dz\wedge\,dx + H_z\,dx\wedge\,dy, \end{aligned}$$

$$F\wedge F = 2(\vec{E},\vec{H})\,dt\wedge\,dx\wedge\,dy\wedge\,dz.$$

В множителе перед базисной формой $dt\wedge\,dx\wedge\,dy\wedge\,dz$ легко узнать один из инвариантов электромагнитного поля.

Задача 7. Проверить Примеры 4, 5, 6.

Определение 26. *Внешней производной* от q-формы A называется $(q+1)$-форма dA с компонентами

$$(dA)_{m_0 m_1 \dots\, m_q} = (q+1)\,\partial_{[m_0} A_{m_1 \dots\, m_q]}.$$

Для скаляра внешняя производная совпадает с градиентом.

Задача 8. Проверить, что компоненты объекта dA в Опр. 26 действительно преобразуются как компоненты антисимметричного тензора, имеющего $q+1$ нижний индекс.

Замечание 5. Формулу для внешней производной легко запомнить с помощью следующего мнемонического правила:

$$dA = \partial\wedge A.$$

Замечание 6. Мы не можем определить внешнюю производную для поливектора, т.к. индекс у производной стоит снизу, а антисимметризовать можно только индексы одного типа.

Утверждение 5. Для внешней производной и внешнего произведения q-формы A и p-формы B справедливо следующее правило Лейбница:

$$d(A\wedge B) = dA\wedge B + (-1)^q\,A\wedge dB.$$

Утверждение 6. $d^2 = 0$, т.е. $ddA = 0$ для любой формы A. Это утверждение следует из симметричности второй производной и Утверждения 1.

Определение 27. Если для формы $dF = 0$, то форма F называется *замкнутой.*

Определение 28. Если $F = dA$, то форма F называется *точной.*

Замечание 7. Всякая точная форма замкнута.

Используя Замечание 5 и Примеры 4, 5, легко получить Примеры 7, 8.

Пример 7. Внешняя производная 1-формы (ковектора) A:

$$(dA)_{km} = \partial_k A_m - \partial_m A_k.$$

Пример 8. Внешняя производная 2-формы F:

$$(dF)_{klm} = \partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk} + \partial_m F_{kl}.$$

Пример 9. Примеры 7, 8 и Утверждение 6 прямо связаны с электродинамикой. Четырёхмерный потенциал электромагнитного поля — ковектор A. Его внешняя производная — тензор напряжённости электромагнитного поля $F = dA$. Равенство нулю внешней производной от F, т.е. $dF = ddA = 0$, — равносильно первой паре уравнений Максвелла, которая не содержит источников (источники — плотности заряда и тока).

Пример 10. Пусть $A = \frac{q}{r}\,dt$ — кулоновский потенциал в пространстве Минковского. Тогда напряжённость кулоновского поля — $F = dA = d\frac{q}{r} \wedge dt = -\frac{q}{r^2}\,dr \wedge dt = \frac{q}{r^2}\,dt \wedge dr$.

6.4. Интегрирование дифференциальных форм

Вернёмся к дифференциальным формам максимальной ($q = n$) степени. Для таких форм с единственной нетривиальной компонентой $A_{12\,\dots\,n}$ справедливы следующие равенства:

$$A_{m_1\dots\,m_n} = A_{12\,\dots\,n}\,\varepsilon_{m_1\dots\,m_n},$$
$$A = A_{12\,\dots\,n}\,dX^1 \wedge dX^2 \wedge \ldots \wedge dX^n.$$

$A_{12\,\ldots\,n}$ преобразуется при замене координат как элемент объёма, что позволяет записать инвариантный интеграл по области $\mathbf{U}$:

$$\int\limits_{\mathbf{U}} A_{12\,\ldots\,n} dX^1 dX^2 \ldots dX^n.$$

Возникает желание отождествить $dX^1 \wedge dX^2 \wedge \ldots \wedge dX^n$ и $dX^1 dX^2 \ldots dX^n$. Однако первый объект — базисная n-форма, а второй — бесконечно малый элемент n-мерного объёма. Но так ли страшно это различие? Дифференциал под знаком интеграла нужен, чтобы указать переменные интегрирования, а фактически элемент объёма, и то, как он преобразуется, а преобразуется он как базисная n-форма.

Определение 29. Интеграл от n-формы A по n-мерной области $\mathbf{U}$ определяется и записывается следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbf{U}} A = \int\limits_{\mathbf{U}} A_{12\,\ldots\,n}\, dX^1 \wedge \ldots \wedge dX^n = \int\limits_{\mathbf{U}} A_{12\,\ldots\,n}\, dX^1 \ldots dX^n.$$

В принципе для определения интегрирования q-формы по q-мерной поверхности и в случае $q < n$ достаточно сослаться на отождествление dX^m как дифференциала и как формы, но мы рассмотрим другой эквивалентный путь.

Чтобы определить интегрирование q-формы по q-мерной поверхности в случае $q < n$, определим ограничение формы на поверхность.

Форма является тензором, поэтому

$$A_{m'_1 \ldots m'_q} = A_{m_1 \ldots m_q} \frac{\partial X^{m_1}}{\partial X^{m'_1}} \cdots \frac{\partial X^{m_q}}{\partial X^{m'_q}}. \tag{11}$$

Раньше мы рассматривали случай, когда координаты X и X' были разными координатами на одном пространстве, функции $X(X')$ задают замену координат. Пусть теперь X — координаты на n-мерном многообразии $\mathbf{M}$, а X' — координаты на q-мерном многообразии $\mathbf{V}$. Тогда функции $X(X')$ задают не замену координат, а вложение $\mathbf{V}$ в $\mathbf{M}$. Тем самым мы определяем в $\mathbf{M}$ поверхность $X(\mathbf{V})$, на которой заданы координаты X'.

Определение 30. Теперь формула (11) задаёт *проекцию* X^*A *ковариантного тензора* A *на поверхность* $X(\mathbf{V})$.

Замечание 8. Вместо применения формулы (11) можно, рассматривая dX^m как дифференциалы координат, выразить их через дифференциалы координат на поверхности $dX^{m'}$ и подставить в формулу разложения тензора по естественному базису.

Замечание 9. Обратите внимание, что при $q < n$ уже нельзя обратить матрицу $\frac{\partial X}{\partial X'}$, а значит, при отображении $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ тензоры с нижними индексами отображаются в обратную сторону из $\mathbf{M}$ на $\mathbf{V}$ (при этом ковариантный тензор A в пространстве $\mathbf{M}$ превращается в ковариантный тензор φ^*A в пространстве $\mathbf{V}$), а тензоры с верхними индексами — из $\mathbf{V}$ в $\mathbf{M}$ (при этом контравариантный тензор B в пространстве $\mathbf{V}$ превращается в контравариантный тензор φ_*B в пространстве $\mathbf{M}$, последний оказывается определен не на всём пространстве $\mathbf{M}$, а только на $X(\mathbf{V})$, где может быть определён неоднозначно, в случае если у точки больше одного прообраза).

Определение 31. Интеграл от q-формы по q-мерной поверхности в n-мерном пространстве — это интеграл от проекции формы на эту поверхность:

$$\int\limits_{\varphi(\mathbf{V})} A = \int\limits_{\mathbf{V}} \varphi^* A. \tag{12}$$

Теорема 1. (*Теорема Стокса*)

$$\int\limits_{\mathbf{U}} d\omega = \int\limits_{\partial\mathbf{U}} \omega.$$

Здесь $\partial\mathbf{U}$ — соответствующим образом ориентированная граница поверхности $\mathbf{U}$.

Пример 11. $t,\ r,\ \theta,\ \phi$ — координаты в пространстве Минковского ($r,\ \theta,\ \phi$ — сферические координаты):

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2).$$

Пусть тензор напряжённости электромагнитного поля задаётся как

$$F = \mu \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi, \tag{13}$$

что соответствует магнитному заряду μ в точке $r = 0$. Тогда магнитный поток через поверхность $\mathbf{S}$, определяемую условиями $t = \mathrm{const}$, $r = \mathrm{const}$, задаётся интегралом

$$\Phi_m = \int\limits_{\mathbf{S}} F.$$

На поверхности $\mathbf{S}$ введём координаты $\theta,\ \phi$, в которых ограничение F на $\mathbf{S}$ по-прежнему задаётся формулой (13), так что

$$\Phi_m = \int\limits_{\mathbf{S}} \mu \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi\, \mu = 4\pi\mu.$$

При $r \neq 0$ — $dF = 0$, но мы не можем применить теорему Стокса, т.к. введённые координаты $t,\ r,\ \theta,\ \phi$ имеют особенность при $r = 0$, Перейдём поэтому к координатам $t,\ x = r\sin\theta\,\cos\phi,\ y = r\sin\theta\,\sin\phi,\ z = r\cos\theta$, в которых $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + +dz^2$. В этих координатах

$$dF = 4\pi\mu\delta(x)\delta(y)\delta(z)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Поскольку $dF \neq 0$, не существует потенциала A, такого, что $F = dA$. Однако потенциал можно ввести, если провести разрез от магнитного заряда до бесконечности. Отсутствие магнитных зарядов оказывается, таким образом, связано с существованием глобального (т.е. заданного на всей области) потенциала.

Мы можем рассматривать поле F только в области вне магнитных зарядов. Для пространства Минковского из $dF = 0$ следует, что существует потенциал A, такой, что $F = dA$, но после исключения из области определения поля F мировых линий магнитных зарядов потенциал оказывается определён только локально, т.е. для областей, через которые не проходят выкинутые мировые линии. Таким образом, магнитные заряды оказываются связанными с топологией области определения поля F.

7. Поверхности

Определение 32. q-мерная *поверхность* (*подмногообразие*) $\mathbf{U} \subset \mathbf{M}$ может задаваться как образ (или замыкание образа) гладкого отображения $f : \mathbf{U}_0 \to \mathbf{M}$, т.е. $\mathbf{U} = f(\mathbf{U}_0)$, где $\mathbf{U}_0$ — некоторое q-мерное многообразие, причём ранг матрицы $\frac{\partial f^M}{\partial \xi^m}$, где ξ^m $(m = 1, \ldots, q)$ — координаты на $\mathbf{U}_0$, равен q, а все образы открытых подмножеств множества $\mathbf{U}_0$ могут быть заданы как пересечения $\mathbf{U}$ и открытых подмножеств множества $\mathbf{M}$.

Такой способ задания поверхности называется *явным.*

При явном описании поверхности $\mathbf{U}$ существует произвол в выборе координат на $\mathbf{U}_0$, т.е. описание включает q произвольных скалярных функций $\xi^m : \mathbf{U}_0 \to \mathbb{R}$.

Дифференциальные операторы $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ представляют собой касательные векторы к поверхности и образуют базис в касательном пространстве. Их внешние произведения представляют собой касательные поливекторы

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial \xi^{i_k}},$$

которые заданы на $\mathbf{U}_0$, но операция f_* позволяет перенести их на $\mathbf{U} \in \mathbf{M}$.

Роль касательного вектора для кривой выполняет касательный поливектор степени q. Такой поливектор определяется почти однозначно — с точностью до скалярного множителя. Этот множитель можно было бы фиксировать, если бы на поверхности был задан поливектор максимальной степени.

Альтернативный способ описания поверхностей — неявный.

Определение 33. Ориентированная поверхность без границы описывается системой уравнений $\varphi = c$, где

$$\varphi = (\varphi^1,\, \dots,\, \varphi^{n-q}), \qquad c = (c^1,\, \dots,\, c^{n-q})$$

— наборы скалярных функций и констант, т.е.

$$\mathbf{U} = \{p \in \mathbf{M} | \varphi^\alpha(p) = c^\alpha,\, \alpha = 1,\, \dots,\, n-q\}, \tag{14}$$

причём ранг матрицы $\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial X^M}$ равен $n-q$ в точках $p \in \mathbf{U}$.

Определение 34. Ориентация поверхности определяется следующим условием: в каждой точке $p \in \mathbf{U}$ базисные формы $d\xi^m$ на поверхности $\mathbf{U}$ вместе с градиентами $d\varphi^\alpha$, $\alpha = 1,\, \dots,\, n-q$ должны образовывать правый базис в кокасательном пространстве.

Определение 35. Ориентируемая поверхность с границей «вырезается» из ориентируемой поверхности без границы условием $\varphi^0 \geq c^0$, где φ^0 — ещё одна гладкая скалярная функция, причём ранг матрицы $\frac{\partial\varphi^{\tilde\alpha}}{\partial X^M}$, где $\tilde\alpha = 0,\, \dots,\, n-q$, равен $n-q+1$ в точках границы $p \in \partial\mathbf{U}$, т.е.

$$\mathbf{U} = \{p \in \mathbf{M} | \varphi^\alpha(p) = c^\alpha,\, \alpha = 1,\, \dots,\, n-q;\, \varphi^0 \geq c^0\}. \tag{15}$$

Определение 36. *Граница* ($\partial\mathbf{U}$) определяется условием (14), взятым для значения q на 1 меньше. Последняя скалярная функция и соответствующая константа определяются как

$$\varphi^{n-q+1} = -\varphi^0, \qquad c^{n-q+1} = -c^0. \tag{16}$$

(Нумерация и знак определяются соответствием с общепринятыми соглашениями для ориентации поверхности и границы.)

Замечание 10. Легко видеть, что граница границы — пустое множество ($\partial\partial\mathbf{U} = \emptyset$), т.е. $\partial^2 = 0$ (здесь ∂ — операция взятия границы).

Определение 37. Если $\partial\mathbf{U} = \emptyset$, то поверхность $\mathbf{U}$ — *цикл*.

Замечание 11. Всякая граница является циклом. Обратное верно не для всех пространств.

Пример 12. В $\mathbb{R}^n$ всякий цикл является границей.

Пример 13. В пространстве $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ (трёхмерное пространство с выколотой точкой) всякая замкнутая двумерная поверхность является циклом. При этом она является границей тогда и только тогда, когда не охватывает выколотую точку. Замкнутая поверхность, охватывающая выколотую точку, является циклом, но не границей.

8. Свёртка дифференциальных форм и поливекторов

Если заданы дифференциальная форма A и поливектор B с компонентами $A_{m_1\dots m_q}$ и $B^{n_1\dots n_p}$, то можно ввести тензоры следующего вида:

$$(A,B)^{(k)}_{m_{k+1}\dots m_q}{}^{n_{k+1}\dots n_p} = A_{\lfloor l_1\dots l_k\rfloor m_{k+1}\dots m_q} B^{\lfloor l_1\dots l_k\rfloor n_{k+1}\dots n_p}, \tag{17}$$

$$(A,B)^{(k)}_{m_1\dots m_{q-k}}{}^{n_1\dots n_{p-k}} = A_{m_1\dots m_{q-k}\lfloor l_1\dots l_k\rfloor} B^{n_1\dots n_{p-k}\lfloor l_1\dots l_k\rfloor}. \tag{18}$$

Индекс (k) указывает число индексов, по которым производилась свёртка. Очевидно, $k \le \min(q,p)$. В случаях, когда это не может привести к неоднозначности в прочтении формул, (k) будет опускаться. Две определённые выше скобки различаются лишь знаком (и то не всегда).

Определяемый тензор не является дифференциальной формой или поливектором при произвольных q, p и k (т.е. тензор не будет антисимметричен по всем индексам), но если $k = q$, то

$(A,B)^{(q)}$ будет поливектором, а если $k=p$, то $(A,B)^{(p)}$ будет дифференциальной формой.

9. Дифференциальные формы и поливекторы в присутствии формы объёма

Определение 38. Определим форму объёма Ω как

$$\Omega_{M_1\dots M_n}=f(X)\,\varepsilon_{M_1\dots M_n},\qquad \Omega=f(X)\,dX^1\wedge\ldots\wedge dX^n. \quad (19)$$

Здесь $\varepsilon^{M_1\dots M_n}=\varepsilon_{M_1\dots M_n}$ — полностью антисимметричный символ, $\varepsilon_{1\,\dots\,n}=+1$, а $f:\mathbf{M}\to\mathbb{R}$ — неотрицательная функция.

Определение 39. Даже в отсутствие метрики, при условии $f(X)>0$, мы можем определить контравариантные компоненты формы объёма:

$$\check\Omega^{M_1\dots M_n}=f^{-1}(X)\,\varepsilon^{M_1\dots M_n},\qquad \check\Omega=\frac{1}{f(X)}\,\partial_1\wedge\ldots\wedge\partial_n. \quad (20)$$

Введённый здесь поливектор $\check\Omega$ несёт акцент для того, чтобы в присутствии метрики отличаться от поливектора Ω, полученного из формы объёма поднятием индексов с помощью метрики. $\check\Omega$ и Ω могут отличаться знаком ($\Omega=\sigma\check\Omega$).

Здесь и далее $\sigma=\operatorname{sgn}\det(g_{MN})$.

Легко убедиться, что

$$\begin{aligned}(\Omega,\check\Omega)^{(n)}&=1,\\(\Omega,\check\Omega)^{(n-1)N}_{M}&=\delta^N_M,\\(\Omega,\check\Omega)^{(n-k)}_{M_1\dots M_k}{}^{N_1\dots N_k}&=k!\delta^{[N_1}_{M_1}\ldots\delta^{N_k]}_{M_k}.\end{aligned}\quad (21)$$

Определение 40. Используя форму Ω и поливектор $\check\Omega$, можно ввести операцию $*$, превращающую поливектор B степени p в дифференциальную форму $*B$ степени $n-p$, и обратную операцию $*^{-1}$, превращающую форму A степени q в поливектор $*^{-1}A$ степени $n-q$:

$$*B = (\Omega, B)^{(p)}, \qquad *^{-1}A = (A, \check{\Omega})^{\underline{(q)}}. \tag{22}$$

Таким образом,

$$(*B)_{m_{p+1}\dots m_n} = \frac{f(X)}{p!}\, B^{m_1\dots m_p}\varepsilon_{m_1\dots m_n}.$$

Легко увидеть, что если какая-то компонента поливектора B степени p нумеруется индексами $m_1, \dots, m_p$, то после операции ходжевской дуальности ей соответствует компонента $(n-p)$-формы $*B$, которая нумеруется индексами $l_{p+1}, \dots, l_n$, причём $m_\alpha \neq l_\beta$, $\alpha = 1, \dots, p$, $\beta = p+1, \dots, n$. Отсюда следует, что $*$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между p-поливекторами и $(n-p)$-формами.

Используя формулы (21), легко видеть, что

$$*^{-1} * B = B, \qquad * *^{-1} A = A.$$

Определение 41. Заданный на дифференциальных формах оператор внешнего дифференцирования d, повышающий степень формы на 1, позволяет ввести на поливекторах оператор взятия дивергенции δ, понижающий степень поливектора на 1:

$$\delta = *^{-1}d*,$$

$$(\delta A)^{m_1\dots m_{q-1}} = \frac{1}{f(X)}\partial_{m_q}\left(f(X)A^{m_1\dots m_q}\right). \tag{23}$$

10. Дифференциальные формы в присутствии метрики

Ранее уже отмечалось, что единственная компонента формы максимальной степени (n-формы, где n — размерность многообразия) преобразуется как элемент объёма, поскольку корень из определителя метрики преобразуется именно таким образом. Введём теперь форму объёма по имеющейся метрике. (Далее будет использоваться обозначение $g = \det(g_{mk})$.)

Определение 42. Форма

$$\Omega = \sqrt{|g|}\, dX^1 \wedge \ldots \wedge dX^n = \sqrt{|g|}\, d^n X$$

называется *элементом объёма* или *формой объёма порождённой метрикой* g_{mk}.

Задача 9. показать, что Ω в Опр. 42 — тензор относительно преобразований с положительным якобианом.

Чтобы проверить, что такая форма объёма соответствует нашему обычному представлению об объёме, диагонализуем метрику в какой-либо точке, тогда в этой точке базисные векторы $\frac{\partial}{\partial X^k}$ будут иметь длину $\sqrt{|g_{kk}|}$, а натянутый на них элемент объёма равен $\sqrt{|\prod_{k=1}^n g_{kk}|} = \sqrt{|\det(g_{mk})|}$.

Если имеется метрика, то можно поднимать и опускать индексы и не различать формы и поливекторы. Теперь операция $*$ устанавливает естественное взаимно однозначное соответствие между q-формами и $(n-q)$-формами.

При наличии метрики с помощью операции $(\cdot,\cdot)^{(\cdot)}$ естественно определяется норма дифференциальной q-формы A.

Определение 43. *Норма* $\|A\|$ *дифференциальной* q*-формы* A — это скаляр, определяемый равенством

$$\|A\|^2 = (A, A)^{(q)}.$$

Замечание 12. Иногда нормой формы A называют число $\|A\|_{\int}$:

$$\|A\|^2_{\int} = \int\limits_{\mathbf{M}} \|A\|^2 \Omega = \int\limits_{\mathbf{M}} *\|A\|^2.$$

Норма, заданная Опр. 43, относится к значению формы в точке, а норма $\|A\|_{\int}$ описывает форму в целом.

Для дуальной q-формы мы можем записать следующие полезные тождества ($\sigma = \mathrm{sgn}(g)$):

$$\begin{aligned} \| * A\|^2 &= \sigma \|A\|^2, && (24) \\ (*A, *A)_{MN} &= \sigma \left(\|A\|^2 \, g_{MN} - (A, A)_{MN} \right), && (25) \\ * * A &= \sigma (-1)^{q(D-q)} A. && (26) \end{aligned}$$

$$(\delta A)^{m_1 \ldots m_{q-1}} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{m_q} \left(\sqrt{|g|} A^{m_1 \ldots m_q} \right). \tag{27}$$

Лапласиан $\Box$ от q-формы A определяется формулой

$$\Box A = (-1)^q (\delta d - d\delta) A \tag{28}$$

(существуют и альтернативные обобщения лапласиана, использующие ковариантные производные).

Для скаляра лапласиан — оператор Бельтрами–Лапласа:

$$\Box \varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_M \sqrt{|g|} \, g^{MN} \partial_N \varphi. \tag{29}$$

Задача 10. Вычислить $\|\Omega\|^2$.

Задача 11. Вычислить $\|\Omega\|_\int$ для единичной сферы.

Задача 12. Показать, что для любой q-формы A на n-мерном многообразии $\mathbf{M}$ с метрикой g_{mk} выполняется соотношение (26).

Иногда операцию d называют градиентом дифференциальных форм, а операцию δ — дивергенцией. Действительно, для 1-формы операция δ задаёт обычную дивергенцию.

Пример 14. Рассмотрим 3-мерное евклидово пространство. До тех пор, пока мы работаем в декартовых координатах (т.е. пока метрика имеет вид $g_{mk} = \delta_{mk}$, $m, \ k = 1, \ 2, \ 3$), верхние и нижние индексы можно не различать. Пусть $H = (H_1, H_2, H_3)$ — вектор, тогда

$$(*H)_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как обычно, первый индекс нумерует строки, а второй — столбцы. Легко проверить, что $**H = H$.

Пример 15. При переходе от 3-мерного пространства к 4-мерному пространству-времени 3-мерные векторы могут превращаться в пространственную часть 4-мерных векторов, но это не единственный способ. Можно сначала превратить 3-мерный вектор в 3-мерную 2-форму (представляемую антисимметричной матрицей), а потом дополнить 3-мерную 2-форму до 4-мерной 2-формы, добавив 3 дополнительные компоненты (строка и столбец с номером 0). Эти дополнительные компоненты образуют ещё один 3-мерный вектор $E = (E_1, E_2, E_3)$.

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Именно так, при переходе от 3-мерной геометрии к 4-мерной, два 3-мерных вектора электрического и магнитного полей объединяются в 2-форму электромагнитного поля F (не все знаки в этих заметках совпадают с общепринятыми, впрочем иногда существует несколько «общепринятых» выборов знаков). Если метрика задана как $g_{mk} = \eta_{mk} = \pm\mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$, а $\varepsilon_{0123} = +1$, то $*F$ записывается как

$$(*F)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & H_1 & H_2 & H_3 \\ -H_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -H_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -H_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. пара 3-мерных векторов (E, H) превращается в пару $(H, -E)$, если повторить операцию $*$, то получится пара $(-E, -H)$, т.е. знак F изменится, как и следовало ожидать, поскольку $\mathrm{sgn}(g)(-1)^{2(4-2)} = -1$.

Пример 16. Как упоминалось выше, первая пара уравнений Максвелла (не содержащая источников) записывается в виде $dF = 0$, с помощью операции δ эти уравнения переписываются как $\delta * F = 0$. Вторую пару уравнений Максвелла (содержащую токи и заряды) можно записать как $\delta F = -4\pi j$ или как $d * F = -4\pi \, * j$, где j — 4-мерный вектор плотности тока (временная компонента j — плотность заряда, а пространственные компоненты образуют 3-мерный вектор плотности тока).

Пример 17. Действие для точечной частицы — интервал вдоль мировой линии, умноженный на $-m$, т.е.

$$S_m = -m \int \sqrt{-\frac{dx^m}{dl}\frac{dx^k}{dl} g_{mk}} \, dl,$$

где интеграл берётся по произвольному монотонному параметру l вдоль мировой линии. Движение частицы задаётся функциями $x^m(l)$. Знак минус под корнем предполагает сигнатуру $(-, +, +, +)$. Метрика g_{mk}, входящая в действие, может не быть метрикой Минковского, т.е. формула применима и в искривлённом пространстве-времени (или в криволинейных координатах). Движение непрерывного распределения частиц, движущихся по непересекающимся мировым линиям («пыль»), возможно описать также с помощью другого действия:

$$S = -\int \sqrt{|g|} \, d^4X \, \|df^1 \wedge df^2 \wedge df^3\|.$$

Здесь мировые линии пылинок задаются уравнениями $f^\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha = 1,\ 2,\ 3$, а плотность пыли в сопутствующей системе координат задаётся как $\|df^1 \wedge df^2 \wedge df^3\|$. 4-мерная плотность тока пыли задаётся как $*(df^1 \wedge df^2 \wedge df^3)$. С помощью последнего действия можно описать и одну частицу.

Задача 13. Доказать для двух q-форм A и B формулу

$$A \wedge *B = *(A, B)^{(q)} = (A, B)^{(q)} \, \Omega. \tag{31}$$

(Форма $A \wedge *B$ имеет максимальную степень, а значит, пропорциональна Ω, чтобы найти коэффициент пропорциональности вычислим $*(A \wedge *B)$ и воспользуемся результатом вычисления $\|\Omega\|$ в одной из предыдущих задач).

Формула (31) позволяет записать

$$\int (A, B)^{(q)}\,\Omega = \int *(A, B)^{(q)} = \int A \wedge *B.$$

Подобная запись будет полезна при рассмотрении действия для электромагнитного поля.

11. Действие в механике и теории поля

Мы можем рассматривать различные дифференциальные уравнения в качестве уравнений движения системы, но далеко не всякое уравнение будет физически осмысленно. К счастью, многие физические системы описываются с помощью *действия*, из которого потом можно извлечь стандартными методами физически осмысленные уравнения движения, сохраняющиеся величины и токи, включая энергию и импульс. По этой причине, даже если уравнения движения уже известны, для их исследования бывает полезно найти соответствующее действие.

11.1. Действие в механике

В теоретической механике действие представляет собой интеграл по времени от лагранжиана, который является функцией от обобщённых координат и скоростей (производных от координат по времени):

$$S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\,dt. \tag{32}$$

Действие представляет собой функционал от траектории системы в конфигурационном пространстве. Это означает, что действие ставит в соответствие каждой траектории в конфигурационном пространстве (всякому $x(t)$) некоторое вещественное число $S[x(t)]$, т.е. функционал — это просто функция на пространстве функций.

Аналогично обычной производной $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ можно определить функциональную производную $\frac{\Delta S}{\Delta x(t)}$.[1]

Обратите внимание, что пространство функций бесконечномерно, поэтому если обычная частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ имела n компонент, нумеруемых разными значениями i, то функциональная производная $\frac{\Delta S}{\Delta x(t)}$ имеет бесконечное число компонент, нумеруемых разными значениями t. Это наглядно видно на формулах для дифференциалов

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \qquad \Delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\Delta S}{\Delta x(t)} \Delta x(t).$$

Вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}$ в конечномерном случае в бесконечномерном случае мы имеем $\int\limits_{t_0}^{t_1} dt$.

Используемые граничные условия подразумевают, что вариация координат $\Delta x(t)$ обращается в нуль на границах области интегрирования (в точках t_0 и t_1).

Приведём теперь точное определение вариационной производной и вариации действия.

Определение 44. Пусть функционал $S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})\, dt$ — действие, а гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция $\Delta x(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\Delta x(t_0) = \Delta x(t_1) = 0,$$

[1]Обычно принято писать $\frac{\delta S}{\delta x(t)}$, но буква δ у нас уже использована для обозначения операции $*^{-1}d*$, которая тоже потребуется при рассмотрении действия для электромагнитного поля.

тогда выражение

$$\Delta S[x(t)] = \left.\frac{dS[x(t) + \varepsilon\,\Delta x(t)]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

называется *вариацией действия*.

На практике можно считать, что $S[x + \Delta x(t)] = S[x(t)] + \Delta S[x(t)] + O((\Delta x(t))^2)$.

Определение 45. Пусть вариация действия записывается в следующем виде:

$$\Delta S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{\Delta S}{\Delta x^\alpha(t)}\, \Delta x^\alpha(t),$$

где $\frac{\Delta S}{\Delta x^\alpha(t)}$ — некоторое выражение, не зависящее от $\Delta x^\alpha(t)$, тогда выражение $\frac{\Delta S}{\Delta x^\alpha(t)}$ называется *вариационной производной* от S по x. Здесь индекс α нумерует обобщённые координаты. По повторяющемуся индексу α подразумевается суммирование.

Принцип экстремального действия. Если $S[x(t)]$ — действие, то уравнения движения задаются как $\frac{\Delta S}{\Delta x^\alpha(t)} = 0$.

Утверждение 7

$$\frac{\Delta S}{\Delta x^\alpha(t)} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}.$$

Легко видеть, что число уравнений движения, получаемых при вариации действия, равно числу компонент x^α.

Отметим, что если скорости не входят в лагранжиан, то $\frac{\Delta S}{\Delta x^\alpha(t)} = \frac{\partial L(x)}{\partial x}$, т.е. уравнения движения превращаются из дифференциальных в алгебраические, а это значит, что такое действие не может описывать динамику.

11.2. Действие в теории поля

В теории поля мы имеем дело с системами с бесконечным числом степеней свободы, которые задаются с помощью *полей*. В такой теории лагранжиан задаётся формулой вида

$L = \int d^{n-1}\mathbf{x}\,\mathcal{L}(\varphi,\,\partial\varphi,\,\mathbf{x},\,t)$, где $\mathbf{x}$ — совокупность пространственных координат (число которых предполагается равным $n-1$), а φ — совокупность полей. В плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ входят значения полей в данной точке в данный момент времени и их производные по пространственным координатам и по времени. Действие для такого лагранжиана приобретает вид

$$S[\varphi(x)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} dtL = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{\mathbf{V}} d^{n-1}\mathbf{x}\,\mathcal{L} = \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x\,\mathcal{L}(\varphi,\,\partial\varphi,\,x).$$

Здесь $x = (\mathbf{x},\,t)$ — совокупность пространственных и временных координат, а $\mathbf{U} = [t_0, t_1] \times \mathbf{V}$ — область пространства-времени, по которой идёт интегрирование.

Если действие релятивистки инвариантно, то, потребовав, чтобы в действие входили производные по времени не выше первого порядка, мы тем самым требуем, чтобы все производные по координатам, входящие в действие, были не выше первого порядка.

Записав действие через плотность лагранжиана $\mathcal{L}$, мы получаем формулу $S[\varphi(x)] = \int_{\mathbf{U}} d^n x\,\mathcal{L}(\varphi,\,\partial\varphi,\,x)$, которая во многом аналогична формуле (32), при этом можно проследить следующие аналогии:

- время t — совокупность всех пространственных и временных координат x,
- области интегрирования: $[t_0, t_1]$ — $\mathbf{U}$,
- границы областей интегрирования: $\{t_0, t_1\}$ (точки t_0 и t_1 входят с противоположной ориентацией) — граница $\partial\mathbf{U}$,
- лагранжиан L — плотность лагранжиана $\mathcal{L}$,
- обобщённые координаты x^α — поля φ^α,
- скорости $\dot{x}^\alpha$ — производные от полей $\partial_m\varphi^\alpha$.
- энергия $\dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$ — «тензор»[2] энергии-импульса $\partial_m\varphi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_k\varphi^\alpha} - \delta^k_m\mathcal{L}$,

[2]Величина определённая таким образом не является тензором относительно общекоординатных преобразований.

- функциональная производная:
$\frac{\Delta S}{\Delta x(t)} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ — $\frac{\Delta S}{\Delta \varphi(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_m \varphi}$,
- внешняя сила $f(t)$ — источник поля $j(x)$,
- член в действии, соответствующий внешнему влиянию:
$\int dt\, f_\alpha(t) x^\alpha$ — $\int d^n x\, j_\alpha(x) \varphi^\alpha$.

11.3. Общекоординатные преобразования

Если мы рассматриваем пространственные и временные координаты как координаты на многообразии, то интегрирование по области пространства времени естественно проводить, используя форму объёма, т.е.

$$S[\varphi(x)] = \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x) = \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x \sqrt{|g|} L(\varphi, \partial\varphi, x).$$

Поскольку область интегрирования $\mathbf{U}$ произвольна, величина $L(\varphi, \partial\varphi, x) = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x)/\sqrt{|g|}$ должна быть скаляром. Чтобы образовать скаляр L, как правило, нужно использовать метрику (хотя она и не была указана в числе аргументов).

Чем является (т.е., как преобразуется при замене переменных) вариационная производная $\frac{\triangle S}{\triangle \varphi^\alpha}$ — зависит от того, как преобразуются поля φ^α. Величина $\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\triangle S}{\triangle \varphi^\alpha} \triangle \varphi^\alpha$ должна быть скаляром.

Поэтому если φ^α — скаляр, то $\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\triangle S}{\triangle \varphi^\alpha}$ — тоже скаляр, а если компоненты φ^α при каких-то α представляют собой компоненты дифференциальной формы степени q, то компоненты $\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\triangle S}{\triangle \varphi^\alpha}$ представляют собой соответствующие компоненты поливектора степени q.

Упомянутый выше «тензор» энергии-импульса, делённый на $\sqrt{|g|}$:

$$T^k{}_m = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\partial_m \varphi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_k \varphi^\alpha} - \delta^k_m \mathcal{L} \right),$$

будет настоящим тензором, если все поля φ^α — скаляры.

Как и всякий сохраняющийся ток, тензор энергии-импульса определён неоднозначно (вспомним электромагнитное поле).

Заметим, что сохранение энергии-импульса записывается следующим образом:

$$\partial_k(\sqrt{|g|}T^k{}_m) = 0.$$

Это уравнение не является тензорным. Дивергенция до сих пор была определена нами лишь для полностью антисимметричных тензоров.

Для определения тензорного закона сохранения энергии-импульса понадобится ковариантная производная, но определённый с её помощью «закон сохранения» окажется не вполне настоящим, т.к. энергия и импульс могут передаваться от материи пространству-времени.

В общей теории относительности существует и другое определение тензора энергии-импульса, автоматически дающее симметричный тензор.

11.4. Электромагнитное поле

Электромагнитное поле определяется через четырёхмерный потенциал соотношением

$$F_{mk} = \partial_m A_k - \partial_k A_m,$$

а действие записывается как

$$S[A] = \int\limits_{\mathbf{U}} d^4x\, \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{16\pi} F^{mk} F_{mk} - j^m(x) A_m \right).$$

Варьировать это действие следует по A_m. Однако сначала удобно переписать его в геометрических бескоординатных обозначениях, что позволит рассмотреть даже более общий случай, когда потенциал A является q-формой, а пространство-время — n-мерно. Итак,

$$F = dA,$$

$$S[A] = -\int\limits_{\mathbf{U}} * \left(\frac{1}{8\pi}\|dA\|^2 + (j, A)^{(q)}\right).$$

(Поскольку выражение в скобках — скаляр, звёздочка означает умножение на $d^n x\,\sqrt{|g|}$). Используя формулу (31), перепишем действие в следующем виде:

$$S[A] = -\int\limits_{\mathbf{U}} \frac{1}{8\pi} dA \wedge *dA + A \wedge *j.$$

Следовательно, $\Delta S[A] = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{-1}{4\pi} d\Delta A \wedge *dA - \Delta A \wedge *j.$

Множитель $\frac{1}{2}$ в первом слагаемом исчез, поскольку оно квадратично и симметрично по A, а значит, оба A дают одинаковый вклад.

$$\Delta S[A] = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{-1}{4\pi}\, d(\Delta A \wedge *dA) + \frac{(-1)^q}{4\pi}\, \Delta A \wedge d * dA - \Delta A \wedge *j.$$

К первому члену применяем теорему Стокса:

$$\Delta S[A] = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\mathbf{U}} \Delta A \wedge *dA + \int\limits_{\mathbf{U}} \Delta A \wedge * \left(\frac{(-1)^q}{4\pi}\, \delta dA - j\right).$$

Первый член обнуляется, если положить $\Delta A\Big|_{\partial\mathbf{U}} = 0$:

$$\Delta S[A] = \int_{\mathbf{U}} * \left(\Delta A, ((-1)^q\, \delta dA/(4\pi) - j)\right)^{(q)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\Delta S}{\Delta A_{m_1 \dots m_q}} = \left(\frac{(-1)^q}{4\pi}\, \delta dA - j\right)^{m_1 \dots m_q}.$$

Мы получили уравнения Максвелла:

$$dF = 0, \qquad \delta F = (-1)^q 4\pi\, j. \tag{33}$$

Первое уравнение следует из существования потенциала A, такого, что $F = dA$ (реально, наоборот — из того, что $dF = 0$, следует существование потенциала), а второе — получается при варьировании действия.

Как и для электромагнитного поля, для q-формы A допустимы калибровочные преобразования вида $A \to A + df$, где f — произвольная $(q-1)$-форма. Чтобы фиксировать калибровку, нужно наложить C_n^{q-1} условий (по числу компонент формы f). Поскольку $\Box = (-1)^q(\delta d - d\delta)$, наложив на A калибровочное условие Лоренца $\delta A = 0$ (это условие имеет как раз C_n^{q-1} компонент, т.к. δA — $(q-1)$-форма), получаем уравнение движения в виде волнового уравнения $\Box A = 4\pi j$.

Заметим, что калибровка Лоренца по-прежнему оставляет некоторый произвол в выборе потенциала A. Так если форма f удовлетворяет условию $\delta df = 0$, то соответствующее калибровочное преобразование не нарушает калибровки Лоренца. Заметим также, что мы можем добавить к f точную форму $f \to f + df_1$, новая форма f будет описывать то же самое калибровочное преобразование. Это даёт дополнительный произвол в C_n^{q-2} компонент и мы можем его фиксировать, наложив как раз C_n^{q-2} условий $\delta f = 0$. Теперь можно накладывать на форму f, описывающую остаточную калибровочную симметрию, условие $\Box f = 0$.

Напомним, что уравнения (33) описывают обобщение, из которого обычные уравнения Максвелла получаются при $q = 1$, $n = 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. — М.: УРСС, 1994.

2. *Иванов М.Г.* Лекции по курсу Геометрические методы в классической теории поля: http://www.fizteh.ru/theorphys/courses/geomm/