Геометрические методы в классической теории поля

М. Г. Иванов*

24 января 2004 г.

Содержание

*e-mail: mgi@mi.ras.ru

1 О том, как читать эти лекции

Данное пособие представляет собой конспекты лекций по семестровому факультативному курсу <Геометрические методы в классической теории поля> (курс может быть зачтён как технический курс по выбору).

Это именно конспекты. Поэтому изложение весьма сжатое. Однако, автор старался включить в текст все необходимые определения и формулировки теорем.

Теоремы в большинстве случаев приводятся без доказательств. Некоторые доказательства читателю предлагается вывести самому в качестве задач.

Многие определения даются в двух эквивалентных формулировках, одна из которых обычно даётся на языке компонент, а другая на геометрическом языке. В таких случаях оба определения имеют одинаковый номер, но один из номеров отмечается штрихом. Читатель может свободно опускать любое из двух определений (особенно при первом чтении).

Все темы пособия выбраны так, чтобы представлять интерес для человека изучающего современную теоретическую физику, хотя во многих случаях физические приложения излагаемого формализма даются лишь в виде <намёка>.

Главный физический пример в пособии — общая теория относительности (ОТО). Тем не менее, не все разделы необходимы для введения в ОТО.

В заголовках разделов в скобках указаны номера определений (О), примеров (П), теорем (Т), задач (З), замечаний (Зам.) и пунктов библиографии (в квадратных скобках) входящих в раздел.

Многие разделы пособия могут быть пропущены при первом чтении. При этом выбор изучаемых разделов во многом зависит от интересов читателя.

Для облегчения выбора ниже приводится граф, описывающий зависимость между разделами. Во многих случаях зависимость между разделами не является жёсткой, т.е. один раздел служит иллюстрацией к другому, но может быть понят и в отрыве от него.

Разделы 2, 3, 4 представляют собой конспект вводной лекции.

На вводной лекции обсуждались околофилософские вопросы ОТО (раздел 2), по которым можно читать Фридмана [п1]. Был дан <разминочный> список задач (раздел 3) и список литературы (раздел 4), которые приводятся ниже с развёрнутыми комментариями.

2 Основные идеи ОТО

Общая теория относительности (ОТО) созданная А. Эйнштейном и Д. Гильбертом в 1915 году как релятивистская теория гравитации безусловно является одной из красивейших физических теорий. Подобно другим теориям того же уровня (классическая механика, электродинамика, квантовая теория, специальная теория относительности) ОТО не только разрешила какие-то частные физические вопросы, но и задала свой стиль мышления. Этот стиль оказался плодотворным в рамках ОТО и послужил примером для подражания в создании новых физических моделей.

Фактически в современной физике есть два несводимых друг к другу <больших стиля>: стиль ОТО и квантовый стиль (на сегодня — стиль квантовой теории поля (КТП)). На сегодняшний день физики не располагают непротиворечивой квантовой теорией гравитации, т.е. совместить эти два стиля не удаётся.

Можно было бы выделить и другие стили современного физического мышления, например стиль хаотическо-статистический. Однако именно ОТО и КТП являясь фундаментальными общепризнанными теориями не могут согласоваться друг с другом, тогда как хаотический стиль примирим с обоими концепциями (на самом деле и тут не всё ясно: статистическая физика начинает давать сбои в присутствии сильного гравитационного поля, или когда в квантовой теории встаёт в полный рост Проблема Измерения).

Интересно, что как правило проблемы ОТО (сингулярности) возникают в области малых расстояний, где должны сказываться квантовые эффекты, а проблемы КТП (расходимости) в области больших энергий, где должны сказываться гравитационные эффекты. Это даёт нам надежду, что объединение ОТО и КТП в рамках квантовой теории гравитации позволит решить основные проблемы обоих теорий.

Из общих концепций ОТО отметим:

1. Последовательное использование дифференциально-геометрического формализма допускающего использование произвольных координат (общековариантная запись). Такой подход позволяет аккуратно отделить влияние выбора координат от действительно физических эффектов.

2. Выделение среди движений частиц <естественных> (свободных) восходящее ещё к грекам (которые считали естественным круговое движение) и прослеживающееся в классической механике (<естественное движение> — движение по инерции) присутствует и в ОТО как движение частиц по геодезическим мировым линиям (мировым линиям с экстремальным интервалом). При этом движение под действием гравитации оказывается <естественным>.

Обе эти концепции произвели очень сильное влияние на многих физиков <проникшихся духом> ОТО и породили идею геометризации физики. Возник целый ряд моделей стремящихся свести к геометрии не только гравитацию, но и все остальные поля и взаимодействия. При этом ожидается, что движение частицы под действие любых полей окажется <естественным>.

Отметим, что общековариантная запись уравнений плохо согласуется с квантовой теорией. При этом, как квантовая теория, так и ОТО представляются теориями очень глубокими и каждая по-своему фундаментальной. То, что до сих пор не существует общепринятой теории их объединяющей, представляется свидетельством того, что мы до сих пор не понимаем что-то очень важное. Впрочем, претендующих на такое объединение моделей существует довольно много, хотя все они обладают определёнными недостатками, в особенности недостатком экспериментальных подтверждений. Другим недостатком может оказаться их недостаточная сумашедшесть.

3 * Разминочные задачи (З:1,2,3)

<Разминочные> задачи даются на закон преобразования компонент метрики при замене системы координат и вычисление метрики индуцируемой на подпространстве метрического пространства.

Ещё одну задачу см. ниже в пункте [2] библиографии.

В обоих случаях метрика записывается в виде $ds^2 = g_{MN}dX^M dX^N$ (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), dX выражается через дифференциалы новых координат или дифференциалы координат на подпространстве и подставляется в формулу, что автоматически даёт искомую метрику.

Решать задачи не обязательно, но полезно.

Задача 1: Рассмотрим поверхность вращения, образованную при вращении окружности вокруг лежащей в той же плоскости прямой не пересекающей эту окружность. Получается баранка в трёхмерном пространстве, в котором имеется обычная евклидова метрика $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. На поверхности баранки индуцируется некоторая метрика, которую надо найти. Предлагается использовать систему координат на поверхности баранки в которой одна координата — угол на окружности, которую мы вращали, чтобы построить баранку, отсчитываемый от нормали, опущенной из центра окружности на ось вращения, а вторая координата — угол, на который повёрнута окружность от начального положения.

Задача 2: Рассмотрим трёхмерное пространство Минковского M^3 с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$. В этом пространстве задана поверхность V^2 уравнением $g_{MN}X^M X^N = C$, т.е. двуполостный гиперболоид $x^2 + y^2 - t^2 = -R^2$ если $C < 0$, или однополостный гиперболоид при $C > 0$. Найти метрику индуцированную на поверхности. Предлагается на поверхности однополостного гиперболоида использовать координаты t и ϕ, где ϕ — полярный угол в плоскости $x - y$, а на поверхности двуполостного гиперболоида использовать координаты x и y.

Поверхности, рассматриваемые в Задаче 2 оказываются *поверхностями постоянной кривизны* (что это такое — см. в последующих главах). Аналогично рассматривая гиперповерхности $g_{MN}X^M X^N = C$ в пространствах разной размерности с метрикой $g_{MN} = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ мы можем получить и другие пространства постоянной кривизны. Такие пространства появляются во многих физических моделях. Их представление в виде гиперповерхностей в пространствах большей размерности иногда оказывается удобным. Например, линейные однородные замены координат в <большом> пространстве сохраняющие метрику g_{MN} задают также и симметрии пространства постоянной кривизны.

Задача 3: Рассмотрим метрику Шварцшильда

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + dr^2/(1 - 2M/r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

В ОТО эта метрика описывает <точечную массу>, находящуюся в начале координат (на самом деле в самом понятии <точечной мыссы> в ОТО есть некоторые тонкости), или невращающуюся незаряженную чёрную дыру массы M. На поверхности $t = \mathrm{const}$ порождается некоторая метрика, которую назовём пространственной частью метрики (надо просто положить $dt = 0$). Нас интересует область $r > 2M$ (т.е. часть пространства <снаружи> чёрной дыры). Пространственная часть метрики может быть также получена как индуцированная метрика на некоторой трёхмерной поверхности в некотором вспомогательном четырёхмерном евклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = dw^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ (заметим, что это вспомогательное четырёхмерное пространство никак не связано с четырёхмерным пространством Минковского). Эта метрика соответствует <цилиндрической> системе координат в плоском четырёхмерном евклидовом пространстве. Поверхность может быть задана уравнением $w = f(r)$, так что координаты θ и ϕ большой роли не играют.

Надо найти функцию $f(r)$.

Если положить $\theta = \pi/2$, то вместо 3-мерной поверхности в 4-мерном пространстве мы получим 2-мерную поверхность в 3-мерном пространстве, в котором задана обычная цилиндрическая система координат (на вид функции $f(r)$ это, очевидно, не влияет). Такую 2-мерную поверхность легче представить себе и нарисовать.

Получив $f(r)$ в явном виде вы увидите, что метрика Шварцшильда покрывает не всё пространство. Поверхность $t = \mathrm{const}$ может быть продолжена за горизонт событий (поверхность $r = 2M$), причём под горизонтом событий обнаруживается ещё одно пространство аналогичное нашему. Впрочем, задача о глобальной структуре решения Шварцшильда этой задачей не исчерпывается, поскольку мы не учитывали время. При учёте времени оказывается, что проникнуть в <соседнее пространство> через Шварцшильдовскую чёрную дыру невозможно, поскольку <кротовая нора> существует бесконечно малое время (время течёт неоднородно, вспомните коэффициент при dt^2) и наблюдатель падающий в дыру попадёт за конечное время не в <соседнюю вселенную> а в сингулярность.

4 Комментированная библиография (З:4*;[п0–п6,1–11])

Все упомянутые ниже цены на книги относятся к периоду до зимы 2001-2002 г.

Ниже привожу комментированный список литературы. Из всех перечисленных книг настоятельно рекомендую прочитать от корки до корки только брошюру Дирака [1]. Это не значит, что остальное совсем не надо читать, но чтобы прочитать всё и полностью потребуется уйма времени. Даже если вы будете специализироваться по ОТО или близкой тематике, за один семестр необъятного не объять, а вот отдельные главы или параграфы из многих книг можно прочитать и вынести из них интересные идеи.

Данная библиография не в коем случае не претендует на полноту.

4.1 Популярные книги ([п0–п6])

Мне кажется, что популярные книги и статьи интереснее всего читать уже имея некоторое (лучше основательное) представление о предмете, тогда порой можно бывает понять, что же имел в виду автор (если этот автор – специалист).

Впрочем, возможно неспециалисту читать научно-популярную литературу тоже непредосудительно. Только тогда это непременно должна быть качественная литература, а не <научно-популярные> статьи в жёлтых газетах. Из последних извлечь какую-либо содержательную информацию может лишь человек, разбирающийся в предмете. Максимум информации который можно извлечь из <жёлтой> научно-популярной статьи — фамилия исследователя и ключевые слова для последующего самостоятельного поиска информации. К сожалению <научно-популярные> статьи в которых путают тепловой насос с вечным двигателем второго рода, а антивещество с тёмной материей появляются в последние два десятилетия и в изданиях, претендующих на солидность (включая правительственную <Российскую газету>, <Известия> и др.).

Ещё одна напасть — низкое качество новых переводов научно-популярных книг, издаваемых многими новыми издательствами.

[п0] Э.П. Кругляков <“Учёные” с большой дороги>, Москва, <Наука>, 2002

Академик Эдуард Павлович Кругляков — председатель Комиссии по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований РАН. Книга написана по материалам собранным комиссией.

Из этой книги можно узнать, почему не следует читать <научно-популярные> статьи где попало. Освещены в книге и некоторые аферы связанные с некоторыми <теориями> претендующими обобщить или опровергнуть ОТО (см. например раздел <Торсионные войны> в [п0]).

[п1] А.А. Фридман <Мир как пространство и время>
Одна из первых популярных книг по ОТО. Было много изданий, последнее из виденных мною РХД 2001.

[п2] С. Хокинг <Краткая история времени (От большого взрыва до чёрных дыр)>, Амфора/Эврика

Стивен Хокинг, как мы все знаем, — живой классик.

[п3] С. Хокинг <Чёрные дыры и молодые вселенные>, СПб., Амфора/Эврика, 2001

Переводчик этого издания безбожно переврал многие специальные термины.

[п4] Р. Пенроуз <Новый ум короля>

Книга о том, почем Пенроуз считает невозможным создание искусственного интеллекта, но по ходу дела автор излагает свои взгляды на ряд разделов математики, физики и биологии, включая квантовую теорию и перспективы квантования ОТО.

Роджер Пенроуз, как мы все знаем, — тоже живой классик.

[п5] С. Хокинг, Р. Пенроуз <Природа пространства и времени>, РХД 2000

Дискуссия двух живых классиков о путях дальнейшего развития науки (т.е. о том, что будет, если проквантовать гравитацию).

Поскольку предмет не слишком разработан, книга доступна и для начинающих.

Как Хокин, так и Пенроуз умеют мыслить как в духе ОТО, так и в духе КТП.

[п6] Д. Дойч <Структура реальности>, РХД 2001

Один из основных предметов книги — философские выводы из результатов квантовой теории (автор придерживается многомировой интерпретации квантовой механики в духе Эверетта).

Дэвид Дойч — крупный специалист по квантовым вычислениям. Его книга — яркий образец квантового мышления. Что характерно, философские последствия ОТО кажутся Дойчу не существенными по сравнению с философскими последствиями квантовой теории.

4.2 Основной список литературы (З:4^*;[1–6])

[1] П.А.М. Дирак <Общая теория относительности>
издавалась неоднократно, в том числе и последние годы, например изд-во <Айнштайн>, Бишкек, 1997 г. тираж 500 экз. См. также [1'] .

В библиотеке МФТИ, помнится, эта брошюра была, но более раннее издание, с которого, очевидно, в Бишкеке и передирали каким-то чисто механическим способом. Поскольку тиражи в те времена были больше, то старое издание может быть по прежнему в ходу.

Эта книга настоятельно рекомендуется как очень краткое введение в ОТО. Эта книга не исчерпывает предмета, но как введение великолепна. Прочитав эту книгу можно браться и за более объёмистые труды уже имея некоторое представление о предмете.

[1'] П.А.М. Дирак <Лекции по теоретической физике> РХД, Москва, Ижевск, 2001 г. тираж 1000 экз.

Одно время книга [1'] продавалась в киоске в НК за 63 руб. Этот сборник содержит [1] и ряд других работ.

Кроме того он содержит в качестве приложения статью А.В. Борисов, И.С. Мамаев <Скобки Дирака в геометрии и механике>. Эта статья также представляет некоторый интерес с точки зрения теоретикомеханической части нашей программы, но её можно и не читать.

[2] А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски <Сборник задач по теории относительности и гравитации>, Москва, Мир, 1979, тираж 12500 экз.

Может быть есть и более поздние издания. Это задачник по форме аналогичный задачнику Галицкого, Карнакова и Когана по квантовой механике — там есть теоретическая часть, задачи и их решения.

Я думаю, что прочитав брошюру [1] можно браться решать задачи из [2] , благо решения всегда можно подсмотреть.

В ходе решения задач по ОТО можно легко запутаться в компонентах многочисленных величин, даже при рассмотрении простейших случаев типа решения Шварцшильда. Могу посоветовать как можно тщательнее продумывать систему обозначений, чтобы сократить работу и исключить возможность ошибок. По моему опыту делая выкладки в ОТО приходится быть педантом, чтобы добраться до ответа и быть в нём хоть немного уверенным.

Вот мой практический совет: Соглашение о свёртке по повторяющимся индексам, конечно, очень удобно тем, что позволяет писать формулы не зависящие от системы координат, но как правило на каком-то этапе систему координат всё равно приходится вводить, а значит нет необходимости следовать этим соглашениям слишком педантично. Но и вводя систему координат нет необходимости выписывать все компоненты явно. Часто бывает удобно в фиксированной системе координат писать какой-то индекс дважды без суммирования или трижды с суммированием. В таких случаях можно, например, подчёркивать лишний индекс. Правда в таких случая нужна повышенная внимательность, так $\delta_M^M = D$ (D — размерность пространства-времени), а $f_{\underline{M}}\delta_M^M = \sum_{M=1}^{D} f_M$, то есть δ_M^M за скобку не выносится.

<u>**Задача 4^*:**</u> В качестве тренировки могу предложить посчитать тензор Риччи для произвольной диагональной метрики (узнать что это такое можно в книге [1]), что не слишком сложно, но даёт явную формулу, в которую потом можно будет подставлять

кучу разных метрик. Метрику можно параметризовать так:

$$g_{MN} = \eta_{MN} \exp(2F_{\underline{M}}),$$

где η_{MN} — постоянная диагональная матрица, на диагонали которой стоят только $+1$ и -1, а F_M — функции координат.

[3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц <Теория поля>
Неплохая книга, очевидно, вполне доступная, но начинать лучше с Дирака [1].

[4] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко <Современная геометрия>
Переиздавалась неоднократно, например Москва, Наука, 1986 г., тираж 16000 экз. В 2-х томах. Деление на тома зависит от издания, но в большинстве изданий нам нужен 1-й том (как правило 1-й том больше 2-го раза в три, но есть издание, где книга разбита на 3 тома равного объёма, там может быть будет нужен и второй том).

В этой книге можно почитать о собственно геометрической части интересующего нас предмета. О тензорах, многообразиях, касательных пространствах, расслоениях, группах и алгебрах Ли, топологии, кривизне, кручении. Но думаю, что без физических иллюстраций материал может показаться суховатым. В [4] есть и примеры имеющие физический смысл, скажем, уравнения Эйнштейна там выводятся, но одной этой книгой ограничиваться нельзя, а поскольку книга толстая, то читать её подряд может быть нерационально, а не подряд — полезно.

[5] В. Паули, <Теория относительности>, М.<Наука>, Главная редакция физико математической литературы, 1991, тираж 17700 экз.

Было много изданий. В библиотеке должна быть.

Это один из старейших обзоров по данному предмету, но читается и сейчас. Правда мат. аппарат там излагается, может быть, немного своеобразно, а потому о тензорах лучше узнавать не из этой книги, но когда человек знает, что такое тензор, ковариантная производная, дифференциальные формы и внешняя производная, то книга читается с удовольствием.

[6] В.И. Арнольд <Математические методы классической механики>
Были разные издания, например Москва, Наука, 1974, 17500 экз. В библиотеке должна быть.

Книга шире по тематике, чем обещает название. Книга интересна не только с точки зрения теор. механики, но и для изучающих ОТО (хотя ОТО там и не излагается). Почитать там о кривизне, расхождении геодезических и т.п. приятно и полезно. В книге много “Добавлений” которые можно читать отдельно. Для нас интересно геометрическое изложение теор. механики в основном тексте и некоторые добавления о кривизне пространства. Для тех, кто как раз сейчас изучает на втором курсе теор. мех. книга тем более полезная.

4.3 * Дополнительный список литературы ([7–11])

[7] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер <Гравитация>, Москва, Мир, 1977

Было ещё издание в 1990-х, но низкого качества. В библиотеках может попадаться старое издание. Это трёхтомник. Труд немного устаревший, но подробный и капитальный. Впрочем, если заниматься предметом профессионально, то одной этой книги мало.

Рекомендовать эту книгу я не берусь, так как старое издание труднодоступно, новое напечатано в отвратительном <слепом> виде, а книга большого объёма и стоит соответственно (новое издание я видел за 600 руб., а старое за 1800 руб.).

Впрочем, если вам повезло достать эту книгу, то прочитать отдельные главы было бы очень полезно. Многие вопросы (в том числе математические) объяснены настолько обстоятельно и подробно, что их даже можно понять.

[8] И.Д. Новиков, В.П. Фролов <Физика чёрных дыр>, М.<Наука>, Главная редакция физико математической литературы, 1986

Монография довольно обзорного характера.

[9] Р. Пенроуз <Структура пространства-времени>, Могилев, БИБФИЗМАТ, 1992

О глобальном устройстве пространства-времени. О том как карты склеивать.

[10] Н. Биррелл, П. Девис <Квантованные поля в искривлённом пространстве-времени>, Новокузнецк, ИО НФМИ, 1998

Последовательной квантовой теории гравитации пока не создано, а книга эта как раз об эффектах квантовой гравитации.

Думаю, что прежде чем браться за квантовую гравитацию не помешает немного разобраться в такой простой классической теории как ОТО.

[11] А.З. Петров <Пространства Эйнштейна>, М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961

А это в основном о том как классифицировать разные пространства по присущей им симметрии. Тоже книга не для первого чтения.

4.4 Где искать текущие публикации

Текущие публикации по физике (а часто и по математике) в большом количестве могут быть найдены в Лос-Аламосском электронном архиве (по адресу *http://xxx.lanl.gov/*). Большинство статей выходящих сейчас в бумажных журналах до этого появляется там.

Теории гравитации и смежным вопросам посвящён раздел *gr-qc* (*“General Relativity and Quantum Cosmology”*), однако, часть статей попадает в другой раздел: *hep-th* (*“High Energy Physics, Theory”*).

В Москве существует Российское гравитационное общество (*http://rgs.da.ru/*), которое регулярно проводит семинары на Физическом факультете МГУ, периодически проводит конференции и издаёт журнал “Gravitation & Cosmology”.

На интернет-страничке (*http://www.fizteh.ru/theorphys/*) Кафедры теоретической физики МФТИ в разделе <читаемые курсы> можно найти программу и текущую версию конспектов факультативного курса <Геометрические методы в классической теории поля>, на основе которого написано это пособие (*http://www.fizteh.ru/theorphys/courses/geomm.esp*).

5 * Топологические пространства (О:1–10;П:1–5;Т:1;З:5–7;[12–14])

Этот раздел мог бы быть опущен с точки зрения скорейшего перехода к ОТО, но мне не хочется ограничивать курс исключительно ОТО, а потому некоторый общематематический материал будет уместен.

5.1 Общие понятия (О:1–10;П:1–3;Т:1)

Приведём некоторые определения.

Опр.1: *Топологическое пространство* — это множество точек X, на котором введена топология, т.е. указано какие подмножества являются открытыми. При этом требуется, чтобы пересечение любых двух и, значит, любого конечного числа открытых множеств было открыто и чтобы объединение любого набора открытых множеств было открыто. Всё X и пустое множество $\emptyset$ также должны быть открытыми.

Опр.2: *Окрестностью точки* называется любое содержащее её открытое множество.

Опр.3: Пространство называется *хаусдорфовым*, если для любых двух точек существуют непересекающиеся окрестности.

Пример 1. <Связное двоеточие>: $X = \{0, 1\}$ Открытыми множествами считаются $\{0\}$, X и пустое множество $\emptyset$. Связное двоеточие является топологическим пространством с нетривиальной топологией, но оно не хаусдорфово.

Пример 2. Вещественная прямая: множество вещественных чисел с обычным понятием открытого множества (открытыми считаются открытые интервалы и их объединения).

Опр.4: *Тривиальная* или *дискретная* топология считает открытыми все подмножества данного множества.

Опр.5: *Замкнутыми множествами* называются множества с открытыми дополнениями, т.е. A замкнуто, если точки пространства X, не входящие в A образуют открытое множество.

Всякое топологическое пространство содержит по крайней мере два подмножества, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми — всё пространство и пустое множество.

Опр.6: Если других таких подмножеств нет, то топологическое пространство *связное.*

В топологии есть разные неэквивалентные понятия связности. Например (следующие три определения даны в обратном порядке, т.е. первое ссылается на второе, а второе — на третье)

Опр.7: Пространство называется *линейно связным*, если любые две точки можно соединить непрерывной кривой.

Опр.8: *непрерывная кривая* γ в пространстве X — это образ вещественной прямой $\mathbb{R}$ при некотором непрерывном отображении $f : \mathbb{R} \to X$.

Опр.9: Функция (отображение) f из топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *непрерывной*, если прообразом всякого открытого множества в Y является открытое множество в X.

Для вещественных функций Опр.9 сводится к обычному определению с помощью эпсилон- и дельта-окрестностей.

Опр.10: Всякое подмножество A топологического пространства X может рассматриваться как *топологическое подпространство*, на нём вводится топология, в которой открытыми множествами считаются пересечения A с открытыми множествами пространства X.

Топологию часто задают с помощью *системы окрестностей.*

Теор.1. Пусть в X задана некоторая система подмножеств Σ, такая, что
а) для всяких двух различных точек a и b найдётся такое множество $U \in \Sigma$, что $a \in U$,

$b \notin U$.
б) для всяких двух множеств U и V из системы Σ, содержащих некоторую точку a найдётся множество $W \in \Sigma$, $a \in W$, $W \subset U \cap V$.
Тогда Σ может рассматриваться как система окрестностей, генерирующая топологию, в которой открытыми считаются множества из Σ и их объединения.

Пример 3. Обычная топология на вещественной прямой генерируется системой всех эпсилон-окрестностей всех точек прямой (на самом деле такая система окрестностей избыточна, например можно оставить только окрестности с рациональными концами).

5.2 ** p-адические числа (П:4,5;З:5–7)

Этот подраздел посвящён двум интересным примерам топологических пространств. Однако, в дальнейшем материал этого подраздела использоваться не будет, поэтому его можно пропустить без ущерба для дальнейшего понимания.

Пример 4. p-адическая топология на множестве рациональных чисел: Пусть p — некоторое фиксированное простое число. Любое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде

$$x = p^\gamma m/n,$$

где γ — целое (может быть и отрицательное), m — целое не делящееся на p, n — натурально не делящееся на p. Очевидно, что γ определяется по данному x однозначно.

Назовём p-адической нормой числа x следующую величину

$$\|x\|_p = p^{-\gamma}.$$

Будем считать, что $\|0\|_p = 0$.

Для p-адической нормы выполняются все пункты определения нормы:
1) $\|x\|_p \geq 0$, причём $\|x\|_p = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,
2) $\|xy\|_p = \|x\|_p \|y\|_p$,
3) $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ — неравенство треугольника.
Причём вместо условия 3) для p-адической нормы выполняется даже более сильное условие
3') $\|x + y\|_p \leq \max(\|x\|_p, \|y\|_p)$
Мы можем определить p-адическое расстояние между точками x и y как $\|x-y\|_p$, а с помощью этого расстояния можно ввести топологию (с помощью эпсилон-окрестностей).

Всякое рациональное число можно разложить в ряд по степеням p

$$x = \sum_{n=\gamma}^{+\infty} x_n p^n,$$

где $0 \leq x_n \leq p - 1$ — целое.

Обратите внимание, что хотя этот ряд и похож на десятичное разложение числа, степень n стремится не к минус бесконечности, а к плюс бесконечности. Для рациональных чисел x_n при достаточно больших n периодично по n, как в обычном десятичном разложении, но бесконечный хвост цифр здесь тянется не $<$после запятой$>$, а $<$до запятой$>$.

Задача 5: доказать, что

$$\lim_{n\to+\infty} p^n = 0$$

(по p-адической норме).

Обратите внимание, что при разложении по степеням p ставить перед рядом знак <+> или <−> оказывается излишним:

Задача 6: доказать, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(p-1)p^n = -1$$

(Указание: прибавьте к этому ряду 1 и получите 0.)

Пример 5. p-адические числа: Подобно тому, как мы переходили от рациональных чисел к вещественным добавляя предельные точки ко всем фундаментальным последовательностям мы можем перейти от рациональных чисел к p-адическим, надо только вместо модуля использовать p-адическую норму. Разложение p-адических чисел по степеням p уже не обязательно будет периодическим.

Над p-адическими числами можно строить мат. анализ почти как над вещественными, хотя ультраметричность (замена неравенства треугольника 3) более сильным условием 3')) накладывает на p-адический анализ своеобразный отпечаток. Например, если два p-адических круга имеют общую точку, то один содержится в другом. Любая точка p-адического круга — центр. Любой p-адический круг делится на p кругов в p раз меньшего радиуса, что приводит к естественной иерархической структуре.

p-адический анализ в свою очередь находит применение в математической физике (квантовая теория, теория струн, кинетическая теория).

Существует ряд формул, называемых адельными формулами, связывающих какой-либо объект для всех простых p и вещественных чисел.

Задача 7: Пусть x — рациональное число. Доказать адельную формулу

$$|x|\prod_p \|x\|_p = 1,$$

где $|x|$ — обычный модуль x, произведение берётся по всем простым p.

5.3 Дополнительная библиография ([12–15])

В последующих лекция мы не будем касаться p-адических чисел, но для интересующихся короткая библиография из трёх пунктов:

[12] Боревич, Шафаревич <Теория чисел>.
Здесь об этом не слишком много, но книгу можно достаточно легко найти в библиотеке.

[13] В.С. Владимиров, И.В. Волович, Е.И. Зеленов <p-адический анализ и математическая физика>, Москва, Наука, 1994, тираж 1000 экз.
Кстати, В.С. Владимиров — тот самый академик Владимиров, что написал учебник <Уравнения математической физики>, был директором МИАН, а сейчас заведует в МИАН Отделом мат. физики, а чл.-корр. И.В. Волович в этом отделе работает, причём занимается не только p-адической мат. физикой, но и основаниями квантовой механики, гравитацией и другими темами.

[14] А.Ю. Хренников, <Неархимедов анализ и его приложения>, М.Физматлит, 2003.
Тоже о p-адическом анализе. Неоспоримым преимуществом этой книги является её наличие в книжном киоске в Новом корпусе МФТИ.

По топологии вообще можно читать какой-нибудь учебник, например

[15] П.С. Александров, <Введение в теорию множеств и общую топологию> М. <Наука>, Главная редакция физико-математической литературы, 1977, тираж 35000 экз.

В библиотеке должен быть.

Впрочем, не воспринимайте эту дополнительную библиографию слишком всерьёз — времени на основной материал может не хватить.

6 $^+$ Дифференцируемое многообразие (О:11,12;З:8,9;Зам.:1)

В этом разделе рассматривается ещё один пример топологического пространства — дифференцируемое многообразие. Этот пример уже напрямую связан с дальнейшим изложением и важен для понимания глобальной структуры решений ОТО. Впрочем, при первом чтении раздел можно пропустить.

Понятие многообразия обобщает впервые математически описанный Гауссом процесс картографирования земной поверхности: пространство покрывается картами, в областях пересечения карт устанавливаются однозначные правила перехода. Набор карт образует атлас. Очевидно, что мы не можем непрерывно и взаимнооднозначно отобразить поверхность земли (сферу, с точки зрения топологии) на плоскость, поэтому нам и бывает нужен атлас содержащий несколько карт.

Опр.11: Пусть множество $\mathbf{M}$ является объединением некоторого конечного или счётного набора множеств U_i, причём для каждого U_i задана функция $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство, образ $f_i(U_i)$ — открытая область в $\mathbb{R}^n$, функция f_i задаёт локальные координаты на U_i).
Пусть U_{ij} — пересечение U_i и U_j.
Пусть

$$F_{ij} = f_i \circ f_j^{-1} : f_j(U_{ij}) \to f_i(U_{ij})$$

— взаимнооднозначная функция определённого класса гладкости K (скажем C^2 или C^∞), с якобианом отличным от нуля.

Здесь f_j^{-1} — функция обратная к f_j. Кружок ($\circ$) обозначает, что левая функция действует на аргумент правой.

Тогда $\mathbf{M}$ называется *гладким дифференцируемым многообразием класса гладкости* K.

Опр.12: Области U_i с заданными на них функциями f_i из предыдущего определения называются *картами*, а весь набор таких областей — *атласом.*

При первом прочтении обычно не ясно, почему гладкость определяется таким неочевидным образом, однако, следует помнить, что само по себе пространство $\mathbf{M}$ не оснащённое картами, не имеет топологии. Поэтому мы не можем говорить о гладкости или непрерывности функций f_i. Однако, пространство $\mathbb{R}^n$ имеет естественную топологию, для него определены классы гладкости, а функции F_{ij} как раз отображают одну область в $\mathbb{R}^n$ на другую. Впрочем, после того как на $\mathbf{M}$ введена структура многообразия $\mathbf{M}$ приобретает топологию и дифференцируемость, которые наследуются у пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. определяется с помощью координат.

Отметим, что мы всегда можем ввести такой атлас, в котором всякая координатная окрестность U_i отображалась бы функцией f_i на всё пространство $\mathbb{R}^n$ (например, тангенс растягивает открытый отрезок $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ на всю прямую). Это делает глобальные свойства многообразий неочевидными. Если, например, мы решили для каких-то координат уравнения Эйнштейна и нашли решение для всех значений координат, то это ещё не значит, что мы описали всё пространство-время, на самом деле это лишь одна карта, за пределами которой решение может иметь продолжение (на вводной лекции мы уже встречались с этим в Задаче 3). Впрочем, в ОТО мы имеем метрику и можем вычислить расстояние до края карты измеренное вдоль различных кривых. Если расстояние до края карты оказывается конечным, и край не является сингулярным (т.е. там не нарушаются условия дифференцируемости и невырожденности физических полей), то решение можно продолжить.

Задача 8: Рассмотрим 2-мерную сферу. Введём на ней атлас из двух карт проецируя её поверхность на плоскость, пересекающую сферу в экваториальной плоскости из северного и южного полюсов. Какие области будут покрыты этими картами? Какие функции будут описывать переход от одной карты к другой?

Задача 9: Рассмотрим тор (квадрат у которого склеены противоположные стороны). Какое минимальное количество карт содержит атлас тора?

Замечание 1: В Задаче 8 сфера рассматривается как поверхность в 3-мерном пространстве $\mathbb{R}^3$, но это совсем не обязательно. Существование внешнего пространства в которое погружено многообразие нигде не предполагается. Пространство-время в ОТО искривлено, но это не значит, что оно погружено в некое плоское пространство большей размерности. В Задаче 9 тор определён как квадрат со склеенными (отождествлёнными) противоположными сторонами, что вообще говоря не обязательно представлять себе в виде бублика в $\mathbb{R}^3$. Если при склейке цилиндра его края склеить не как у тора, а перевернув одну из окружностей, то получится не тор, а бутылка Клейна — односторонняя замкнутая поверхность, которая не реализуется в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений, но вложение многообразия во внешнее пространство нас пока не волнует.

На следующих лекциях будут рассмотрены различные дополнительные структуры на дифференцируемом многообразии, такие как пуассонова структура, симплектическая структура, аффинная связность, метрика. Многообразие не обязано иметь какие-либо структуры из этого набора и вводя их следует разумно себя ограничивать — каждая структура нарушает часть присущей дифференцируемому многообразию симметрии, а симметрия часто имеет физический смысл. В теор. механике будут полезны пуассоновы и симплектические многообразия, наделённые соответствующими структурами, в ОТО будут использоваться псевдоримановы многообразия с псевдоевклидовой метрикой, в других моделях понадобятся и другие структуры.

Ко второй половине этой лекции можно читать в книге [4] (см. основной список литературы) начало Части II <Геометрия и топология многообразий>.

Для нужд теории поля нужно ввести на многообразии (в пространстве-времени) метрику, но мы не будем торопиться — само по себе дифференцируемое многообразие обладает достаточно богатой структурой. Кроме того, помимо метрики на многообразии могут быть заданы (или не заданы) другие структуры, некоторые из которых мы рассмотрим.

7 Тензоры на многообразии (О:13–24';П:6;Зам.:2)

Сначала вспомним определения скаляров, векторов, ковекторов и тензоров на дифференцируемом многообразии.

Хотя дифференцируемое многообразие определяется с использованием координатных окрестностей (карт) дифференциальная геометрия на многообразии строится так, чтобы её утверждения не зависели от вводимой системы координат. Поэтому в качестве исходного вводится понятие скаляра.

Опр.13: *Скаляр* φ (скалярная функция на многообразии $\mathbf{M}$) — гладкая вещественная функция (обычно того же класса гладкости K, который использовался в определении многообразия) на многообразии. Т.е. $\varphi : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$, или (в другой записи) $\varphi : a \mapsto \varphi(a) \in \mathbb{R}$, где $a \in \mathbf{M}$.

Таким образом, скаляр φ ставит в соответствие *точкам пространства* $\mathbf{M}$ вещественные числа, а значит от координат скаляр не зависит. Поэтому окончательный ответ, соответствующий измеряемой величине в физической задаче должен быть скаляром. При этом подразумевается, что условия задачи должны включать какое-то описание прибора. Например, сила является вектором, но показания динамометра — скаляры, которые могут быть вычислены, если известно на какие направления сила проецируется механизмом динамометра.

Однако, чтобы различать точки пространства $\mathbf{M}$ мы используем координаты, поэтому на каждой координатной окрестности U_i с соответствующей координатной функцией $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ (f_i ставит в соответствие точке её координаты) мы можем ввести функцию $\varphi \circ f_i^{-1} : f_i(U_i) \to \mathbb{R}$, которая работает следующим образом $\varphi \circ f_i^{-1}(X) = \varphi(f_i^{-1}(X))$. (Напоминаем, что f_i^{-1} — функция обратная к f_i, а кружок обозначает, что левая функция действует на аргумент правой.) Здесь $X \in f_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ — совокупность координат точки. Т.е. функция $\varphi \circ f_i^{-1}$ ставит в соответствие координатам X соответствующее значение скалярной функции φ. Поскольку обычно мы можем различать точки в $\mathbf{M}$ только с помощью их координат, у нас нет общего способа, который позволил бы задать функцию φ как таковую, без участия координат, а значит вместо функции φ мы будем иметь дело с функциями $\varphi \circ f_i^{-1}$, представляющими её в различных системах координат. При этом мы будем писать

$$\varphi(X) = \varphi \circ f_i^{-1}(X) = \varphi(f_i(X)),$$

что не слишком корректно с точки зрения строгого математика, поскольку $X \in \mathbb{R}^n$, т.е. не тому пространству, которому должен принадлежать аргумент функции φ.

В некоторых случаях нам встретятся выражения типа $\varphi(a)$, где $a \in \mathbf{M}$, а в других $\varphi(X)$, где $X \in \mathbb{R}^n$. Первое выражение представляет собой безкоординатную запись, а второе — запись скалярной функции в определённой системе координат. Безкоординатная запись от системы координат не зависит.

Опр.13': *Скалярная функция* (представленная в определённой системе координат) — это функция, которая преобразуется при замене координат $X'(X)$ следующим образом

$$\phi(X) \to \phi'(X') = \phi(X(X')).$$

($X(X')$ — обратная замена, здесь и далее предполагается, что якобиан $\frac{DX'}{DX}$ не равен нулю.)

В последней формуле скаляр в штрихованной системе несёт штрих, но далее, в большинстве случаев, этот штрих будет опускаться.

Другие геометрические объекты также могут записываться в безкоординатной или координатной (компонентной) форме. Каждая форма имеет свои преимущества, но для практических выкладок обычно рано или поздно приходится переходить к компонентной записи.

Опр.14: *Векторное поле* v — это оператор, который действует на скалярную функцию φ и превращает её в другую скалярную функцию $v[\varphi]$, которая называется *производной по направлению* v от скалярной функции φ. Операция v должна удовлетворять следующим условиям

1) линейность: $v[\alpha\phi + \beta\psi] = \alpha\, v[\phi] + \beta\, v[\psi]$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а ϕ и ψ — скалярные поля,

2) правило Лейбница: $v[\phi\psi] = \psi\, v[\phi] + \phi\, v[\psi]$,

3) непрерывность: для всякого ϕ и для всякого $\delta > 0$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для всякого ψ, такого, что $|\phi - \psi| < \varepsilon$ и $\left|\frac{\partial}{\partial X^m}(\phi - \psi)\right| < \varepsilon$, будут выполняться условия $|v[\phi - \psi]| < \delta$ и $\left|\frac{\partial}{\partial X^m} v[\phi - \psi]\right| < \delta$. ε и δ не зависят от X, а неравенства выполняются для всех X при всех $m = 1, \ldots, n$.

Опр.14': *Векторное поле* v — это набор функций $v^m(X)$, $m = 1, \ldots, n$ преобразующихся при замене координат $X'(X)$ по следующему закону

$$v^m(X) \to v^{m'}(X') = v^m(X(X'))\frac{\partial X^{m'}}{\partial X^m}(X(X')).$$

Здесь и далее по повторяющейся паре индексов предполагается суммирование по всему диапазону $1, \ldots, n$ (если какой-то индекс не учитывается, то мы будем его подчёркивать). Т.е. в предыдущей формуле подразумевается $v^{m'}(X') = \sum_{m=1}^{n} v^m(X(X'))\frac{\partial X^{m'}}{\partial X^m}(X(X'))$.

Опр.15: Суммирование по паре одинаковых индексов называется *свёрткой*.

Опр.16: Повторяющийся индекс, по которому проводится суммирование называется *немым индексом*.

Опр.17: Индекс по которому суммирование не производится называется *свободным индексом*.

При преобразовании векторных полей аргументы всех функций преобразуются так, как преобразуются аргументы скаляров, поэтому далее мы будем их опускать, имея в виду, что они всегда могут быть выписаны исходя из того, что все величины относятся к одной точке многообразия. Обратите внимание, что штрихи оказывается удобным ставить не на сами координаты, а на индексы.

Векторное поле может также называться *контравариантным векторным полем* или *контра-векторным полем*. Слово <поле> может опускаться.

Два определения векторного поля связаны между собой следующими соотношениями

$$v = v^m \frac{\partial}{\partial X^m},$$

$$v[\phi] = v^m \frac{\partial}{\partial X^m}\phi,$$

$$v^m = v[X^m].$$

В последнем соотношении вектор v действует на скалярную функцию X^m, значение которой совпадает со значением координаты X^m в данной точке. Легко проверить, что эти соотношения согласованы друг с другом.

Опр.18: Дифференциальные операторы $\partial_m = \frac{\partial}{\partial X^m}$ образуют *координатный базис* для векторов.

Опр.19: *Ковекторное поле* u — это поле линейной формы на контра-векторах, т.е. это операция, которая ставит в соответствие векторному полю v скалярное поле $\langle u, v\rangle$. Операция u должна удовлетворять следующим условиям
1) линейность: $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а v и w — векторные поля,
3) непрерывность понимается в том же смысле, что и в Опр.14.

Опр.19': *Ковекторное поле* u — это набор функций $u_m(X)$, $m = 1, \ldots, n$ преобразующихся при замене координат $X'(X)$ по следующему закону

$$u_m(X) \to u_{m'}(X') = u_m(X(X'))\frac{\partial X^m}{\partial X^{m'}}(X').$$

Ковекторное поле может также называться *ковариантным векторным полем.* Слово <поле> может опускаться.

Ковекторные поля преобразуются как градиенты. В безкоординатной записи градиент скалярной функции φ записывается как $d\varphi$. Он имеет компоненты

$$(d\varphi)_m = \partial_m\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial X^m}.$$

Легко видеть, что

$$\langle u, v\rangle = u_m v^m \quad \Rightarrow \quad \langle d\varphi, v\rangle = v[\varphi] = v^m\,\partial_m\varphi.$$

Опр.20: Градиенты координат dX^m образуют *координатный базис* для ковекторов. Причём

$$\left\langle dX^k, \partial_m\right\rangle = \delta^k_m = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}.$$

Теперь легко записать связь безкоординатной и координатной записи ковекторов

$$u = u_m\,dX^m,$$

$$u_m = \langle u, \partial_m\rangle\,.$$

Замечание 2: В выкладках надо соблюдать *баланс индексов*:

- в каждом члене индекс может встречаться один или два раза;
- если индекс встречается в члене один раз (свободный индекс), то
  - член зависит от значения этого индекса,
  - мы можем приравнять этот индекс какому-то значению,
  - все члены с которыми этот член складывается/вычитается/приравнивается должны содержать этот индекс тоже один раз в том же (верхнем или нижнем) положении,
  - мы можем переименовать этот индекс, если одновременно таким же образом переименуем это индекс во всех членах, с которыми данный член складывается/вычитается/приравнивается;

- если индекс встречается в члене два раза (немой индекс), то
  - один раз он должен быть верхним, а другой раз — нижним,
  - по нему проводится свёртка,
  - мы не можем приравнять этот индекс какому-то значению,
  - мы можем переименовать этот индекс произвольным образом, но так, чтобы новое имя индекса не совпадало с именами других индексов того же члена;
- мы можем не различать верхние и нижние индексы *только если* мы ограничиваем себя рассмотрением преобразований, для которых матрица Якоби $(\frac{\partial X^{k'}}{\partial X^k})$ ортогональна (почему так — см. ниже), т.е.

  $$\frac{\partial X^{k'}}{\partial X^k}\frac{\partial X^{m'}}{\partial X^m}\delta_{k'm'} = \delta_{km}$$

  (в теоретико-групповых обозначениях это записывается так $\frac{\partial X'}{\partial X} \in \mathrm{O}(n)$);
- мы должны различать индексы, относящиеся к разным системам координат (штрихованные и нештрихованные);
- если вы подставляете какое-то выражение с индексами в формулу, то часто бывает *необходимо* переименовать некоторые индексы:
  - индексы встречающиеся один раз бывает нужно переименовать, чтобы они соответствовали индексам в формуле, в которую вы подставляете выражение;
  - индексы встречающиеся два раза бывает нужно переименовать, чтобы они не совпадали с индексами, уже имеющимися в члене, в который вы подставляете выражение.

Приведённые выше (в Замечании 2) правила обращения с индексами тривиальны, но часто не достаточно чётко осознаются начинающими, что приводит к ошибкам, которых можно было бы легко избежать. Для иллюстрации Замечания 2 см. следующий Пример.

Пример 6. Проиллюстрируем теперь Замечание 2 конкретным примером. Докажем, что свёртка $u_i v^i$ ковектора u и вектора v является скаляром. При замене координат компоненты u и v преобразуются следующим образом:

$$u_{k'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{k'}}, \qquad v^{m'} = \frac{\partial X^{m'}}{\partial X^j} v^j.$$

Надо подставить компоненты u и v в штрихованных координатах в выражение $u_{i'}v^{i'}$. Сначала надо переименовать в исходных выражениях свободные индексы k' и m' в i'

$$u_{i'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{i'}}, \qquad v^{i'} = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^j} v^j.$$

Если мы подставим в свёртку эти выражения, то индекс j войдёт четыре раза, поэтому перед подстановкой надо переименовать индекс j в одном из выражений, например в

выражении для $v^{i'}$ заменим j на k и получим $v^{i'} = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^k} v^k$.
Теперь мы можем подставить $u_{i'}$ и $v^{i'}$ в исходное выражение

$$u_{i'} v^{i'} = u_j \frac{\partial X^j}{\partial X^{i'}} \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^k} v^k = u_j \delta^j_k v^k = u_j v^j = u_i v^i.$$

(В самом конце мы переименовали индекс j в i <для красоты>.)

Опр.21: Векторное пространство образуемое компонентами векторных полей в определённой точке многообразия $a \in \mathbf{M}$ называется *касательным пространством в точке* a и обозначается $T_a(\mathbf{M})$. Совокупность всех касательных пространств данного многообразия $\mathbf{M}$ называется *касательным расслоением* и обозначается $T(\mathbf{M})$.

Опр.22: Векторное пространство образуемое компонентами ковекторных полей в определённой точке многообразия $a \in \mathbf{M}$ называется *кокасательным пространством в точке* a. и обозначается $T^*_a(\mathbf{M})$. Совокупность всех кокасательных пространств данного многообразия $\mathbf{M}$ называется *кокасательным расслоением* и обозначается $T^*(\mathbf{M})$.

Понятие <расслоения> пока рассматриваться не будет. Да и сами (ко)касательные пространства определены здесь только для того, чтобы подчеркнуть, что хотя все (ко)векторные пространства данного пространства устроены одинаково, это разные пространства — им соответствуют объекты в разных точках многообразия и *естественного* (т.е. физически или геометрически предпочтительного) взаимнооднозначного соответствия между (ко)векторами разных (ко)касательных пространств может не существовать. Это затрудняет дифференцирование тензоров, поскольку для дифференцирования надо вычитать друг из друга тензоры в разных (хотя и бесконечноблизких) точках. Учитывая то, что и тензоры (кроме скаляров) в разных точках принадлежат разным пространствам задача дифференцирования тензоров сводится к задаче их переноса в бесконечноблизкие точки.

Опр.23: *Тензорное поле* T *типа* (p, q) — это непрерывное (аналогично Опр.14) линейное по всем своим аргументам отображение p ковекторов $u^1, \dots, u^p$ и q векторов $v_1, \dots, v_q$ на скаляр $T[u^1, \dots, u^p; v_1, \dots, v_q]$.

Опр.23': *Тензорное поле* T *типа* (p, q) — это набор функций ${T^{k_1 \dots k_p}}_{m_1 \dots m_q}(X)$, $k_i, m_i = 1, \dots, n$ преобразующихся при замене координат $X'(X)$ по следующему закону

$${T^{k_1 \dots k_p}}_{m_1 \dots m_q} \to {T^{k'_1 \dots k'_p}}_{m'_1 \dots m'_q} = {T^{k_1 \dots k_p}}_{m_1 \dots m_q} \frac{\partial X^{k'_1}}{\partial X^{k_1}} \cdots \frac{\partial X^{k'_p}}{\partial X^{k_p}} \frac{\partial X^{m_1}}{\partial X^{m'_1}} \cdots \frac{\partial X^{m_q}}{\partial X^{m'_q}}. \qquad (1)$$

Тензор типа $(0, 0)$ — скаляр, типа $(1, 0)$ — вектор, типа $(0, 1)$ — ковектор.

Определения Опр.23 и Опр.23' связаны друг с другом соотношениями

$$T[u^1, \dots, u^p; v_1, \dots, v_q] = {T^{k_1 \dots k_p}}_{m_1 \dots m_q} u^1_{k_1} \dots u^p_{k_p} \, v^{m_1}_1 \dots v^{m_q}_q,$$

$${T^{k_1 \dots k_p}}_{m_1 \dots m_q} = T[dX^{k_1}, \dots, dX^{k_p}; \partial_{m_1}, \dots, \partial_{m_q}].$$

Опр.24: *Тензорное произведение* тензора T типа (p, q) и тензора S типа (r, s) — это тензор $T \otimes S$ типа $(p + r, q + s)$ вида

$$(T \otimes S)[u_1, \dots, u_{p+r}, ; v_1, \dots, v_{q+s}] = T[u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_q] S[u_{p+1}, \dots, u_{p+r}; v_{q+1}, \dots, v_{q+s}].$$

Опр.24': *Тензорное произведение* тензора T типа (p, q) с компонентами ${T^{k_1 \dots k_p}}_{m_1 \dots m_q}$ и тензора S типа (r, s) с компонентами ${S^{l_1 \dots l_r}}_{n_1 \dots n_s}$ — это тензор $T \otimes S$ типа $(p+r, q+s)$ с компонентами

$${{{(T \otimes S)^{k_1 \dots k_p}}_{m_1 \dots m_q}}^{l_1 \dots l_r}}_{n_1 \dots n_s} = {T^{k_1 \dots k_p}}_{m_1 \dots m_q} {S^{l_1 \dots l_r}}_{n_1 \dots n_s}.$$

Тензор $T(a)$ типа (p,q) действует на пространстве

$$\underbrace{T^*_a(\mathbf{M})\otimes\cdots\otimes T^*_a(\mathbf{M})}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{T_a(\mathbf{M})\otimes\cdots\otimes T_a(\mathbf{M})}_{q\text{ раз}},$$

которое является тензорным произведением p кокасательных пространств $T^*_a(\mathbf{M})$ и q касательных пространств $T_a(\mathbf{M})$. Эти пространства порождается следующим базисом

$$dX^{k_1}\otimes\cdots\otimes dX^{k_p}\otimes\partial_{m_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{m_q},$$

который состоит из n^{p+q} элементов. Сам тензор $T(a)$ типа (p,q) принадлежит к сопряжённому пространству

$$\underbrace{T_a(\mathbf{M})\otimes\cdots\otimes T_a(\mathbf{M})}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{T^*_a(\mathbf{M})\otimes\cdots\otimes T^*_a(\mathbf{M})}_{q\text{ раз}},$$

с базисом

$$\partial_{k_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{k_p}\otimes dX^{m_1}\otimes\cdots\otimes dX^{m_q}.$$

Мы можем умножать тензор на число и складывать тензоры одинакового типа. Любой верхний индекс тензора типа (p,q) мы можем свернуть с любым нижним, получившийся при этом объект будет тензором типа $(p-1,q-1)$.

Помимо тензорных полей разных типов можно аналогично определить тензоры заданные на различных подмножествах $\mathbf{M}$: областях, (гипер)поверхностях, кривых, дикcретных наборах точек.

8 $^+$ Производная Ли (О:31,31';П:7,8;З:11;Зам.:6–8)

Производная Ли будет полезна при чтении раздела 9 посвящённого алребрам Ли, а также при рассмотрении калибровочных преобразований и симметрий в ОТО. Однако, при первом чтении этот раздел можно опустить.

Производная Ли обощает на тензоры понятие производной вдоль векторного поля, которое было введено выше для скаляра ($v[\phi]$).

Если векторное поле является достаточно гладким, то можно записать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x^m(t)=v^m(x(t)).$$

Решив эту систему относительно $x^m(t)$ при различных начальных значениях $X_{(0)}=x(t)|_{t=0}$ мы получим зависящее от параметра t семейство преобразований, которые локально (в некоторых областях) для достаточно малых t являются диффеоморфизмами, т.е. сохраняют структуру дифференцируемого многообразия.

Таком образом, мы выбираем некоторую область U, в которой действуют преобразования F_t переводящие точку с координатами $x_{(0)}$ в точку с координатами $x(t)$ (при этом $x(t)|_{t=0}=X_{(0)}$). Преобразование F_0 является тождественным. Для достаточно малых параметров s и t для тех точек, к которым применимы все используемые преобразования можно записать $F_{s+t}=F_s\circ F_t$. Эти преобразования можно рассматривать и как замену координат X координатами $X_{(0)}=F_{-t}X$ (мы взяли преобразование F_{-t}, а не F_t, для того, чтобы производная Ли от скаляра совпала с обычной производной по направлению $L_v\varphi = v[\varphi]$).

Замене координат $X_{(0)} = F_{-t}X$ соответствует некоторое преобразование тензоров (1). Т.е. одно и то же преобразование можно рассматривать как замену координат, или как преобразование полей.

Так для скаляра

$$(F_t\varphi)(X_{(0)}) = \varphi(F_tX_{(0)}),$$

а для тензора общего вида

$$(F_tT)^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q}(X_{(0)}) =$$
$$= T^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q}(F_tX_{(0)})\,\frac{\partial X^{k_1}_{(0)}}{\partial X^{i_1}}(F_tX_{(0)})\dots\frac{\partial X^{k_p}_{(0)}}{\partial X^{i_p}}(F_tX_{(0)})\,\frac{\partial X^{j_1}}{\partial X^{m_1}_{(0)}}(X_{(0)})\dots\frac{\partial X^{j_q}}{\partial X^{m_q}_{(0)}}(X_{(0)}).$$

Это преобразование можно рассматривать либо как преобразование координат, оставляющее тензоры неизменными, либо как преобразование всех тензоров, без изменения координат.

Таким образом, если у нас есть векторное поле v, то мы можем переносить тензоры вдоль этого поля в достаточно близкие точки, а это значит, что мы можем дифференцировать тензоры.

Опр.25: *Производная Ли* от тензора T с компонентами $T^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q}$ вдоль векторного поля v — это тензор L_vT со следующими компонентами

$$L_vT^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q} = \frac{d}{dt}(F_tT)^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q}\bigg|_{t=0}. \tag{2}$$

Замечание 3: Обратите внимание, что для определения производной Ли нам нужна только структура дифференцируемого многообразия! Никакие дополнительные структуры типа метрики здесь не используются!

Учитывая, что в первом порядке по t замена координат имеет вид $X^m = X^m_{(0)} + t\,v^m$, можно раскрыть выражение (2)

$$L_vT^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q} = v^s\frac{\partial T^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q}}{\partial X^s} + T^{k_1\dots k_p}{}_{sm_2\dots m_q}\frac{\partial v^s}{\partial X^{m_1}}\dots + T^{k_1\dots k_p}{}_{m_1\dots m_{q-1}s}\frac{\partial v^s}{\partial X^{m_q}} -$$
$$-T^{sk_2\dots k_p}{}_{m_1\dots m_q}\frac{\partial v^{k_1}}{\partial X^s}\dots - T^{k_1\dots k_{p-1}s}{}_{m_1\dots m_q}\frac{\partial v^{k_p}}{\partial X^s} \tag{3}$$

Производная Ли от тензора типа (p,q) представляет собой снова тензор типа (p,q).

Замечание 4: Отдельные члены в формуле (3) как правило не являются тензорами.

Замечание 5: Обратите внимание, что для определения производной по направлению $v[\phi]$ от скалярного поля ϕ в какой-то точке $a \in \mathbf{M}$ нам нужены компоненты векторного поля v лишь в точке a, а для определения производной Ли L_vT от тензорного поля T в точке a, нам, в случае общего положения. нужны компоненты векторного поля в некоторой окрестности U точки a (т.к. в формуле (3) надо дифференцировать не только компоненты T, но и компонненты v).

Пример 7. Производная Ли от скаляра

$$L_v\varphi = v[\varphi] = v^m\,\partial_m\varphi.$$

Пример 8. Производная Ли от вектора

$$(L_v w)^m = v^k\,\partial_k w^m - w^k\,\partial_k v^m.$$

Задача 10: Вывести формулу (3) и проверить Примеры 7 и 8.

Опр.25': Производная Ли вдоль векторного поля v от тензора T типа (p,q) (обозначается L_vT) представляет собой снова тензор типа (p,q), причём производная Ли от скаляра и вектора задаётся как

$$L_v\varphi = v[\varphi] = v^m\,\partial_m\varphi, \qquad (L_v w)^m = v^k\,\partial_k w^m - w^k\,\partial_k v^m,$$

выполняется правило Лейбница относительно тензорного произведения

$$L_v(T\otimes S) = (L_vT)\otimes S + T\otimes(L_vS),$$

производная Ли перестановочна со свёрткой, т.е
если $S^{\cdots}{}_{\dots} = T^{\cdots\,k}{}_{\dots\,k}$, то $(L_vS)^{\cdots}{}_{\dots} = (L_vT)^{\cdots\,k}{}_{\dots\,k}$.

Задача 11: Проверить эквивалентность двух определений производной Ли. (Указание; рассмотреть производную Ли от w^iu_i как от скаляра и как от свёртки, найти производную Ли от ковектора u, найти производную Ли от произвольного тензора пользуясь правилом Лейбница относительно тензорного умножения).

9 Алгебры Ли (О:32–36;З:13;Зам.:9,10;Т:2)

9.1 Коммутатор (О:32,33;Зам.:9)

Остановимся подробнее на последнем примере и рассмотрим производную Ли от вектора подробнее. В выражение L_vw отличается от L_wv только знаком, поэтому было бы интересно найти более симметричное определение для такой производной и ввести обозначение, учитывающее эту симметрию. Мы можем записать следующее равенство

$$L_vw = [v,w] = v\circ w - w\circ v. \tag{4}$$

Опр.26: Выражение (4) определяет *коммутатор векторных полей* v и w.

Чтобы прояснить выражение $v\circ w - w\circ v$ вспомним представление векторов в виде дифференциальных операторов

$$[v,w]\varphi = v\circ w\varphi - w\circ v\varphi = v[w[\varphi]] - v[w[\varphi]].$$

То, что коммутатор двух векторных полей снова является векторным полем означает, что дифференциальный оператор $v\circ w - w\circ v$ не содержит производных второго порядка.

Нетрудно проверить, что для коммутатора выполняются следующие три свойства:
1) $[v,w] = -[w,v]$ — антисимметричность,
2) $[u,\alpha v+\beta w] = \alpha[u,v]+\beta[u,w]$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ — линейность (с учётом антисимметрии — билинейность),
3) $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]] = 0$ — тождество Якоби.

Замечание 6: Если учесть, что операция $[u, v]$ может рассматриваться с одной стороны, как дифференцирование v вдоль u, а с другой как антисимметричное умножение, то тождество Якоби неожиданно выступает в роли правила Лейбница относительно коммутатора:

$$[u,[v,w]] = L_u[v,w] = [L_u v, w] + [v, L_u w] = [[u,v],w] + [v,[u,w]] = -[w,[u,v]] - [v,[w,u]]. \tag{5}$$

Опр.27: Линейное пространство, на котором введена операция $[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющая свойствам 1),2),3) называется *алгеброй Ли.*

Таком образом, векторные поля на многообразии образуют алгебру Ли относительно операции взятия коммутатора.

Обратите внимание, что мы по прежнему не вводили на многообразии никаких дополнительных структур!

9.2 Скобка Пуассона (О:34)

Уравнения Гамильтона классической механики записываются в виде

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad H = H(q,p),$$

где $H(q,p)$ — функция Гамильтона (гамильтониан — энергия системы выраженная через обобщённые координаты и импульсы).

Для произвольной функции F от q и p мы можем записать

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

$i = 1, \ldots, n$, по повторяющемуся индексу i, как обычно, подразумевается суммирование.

Опр.28: Операция $\{\cdot, \cdot\}$ определяемая соотношением

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{6}$$

называется *скобкой Пуассона* от двух функций F и G переменных q^i и p_i.

Дифференцируемые функции от q и p образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона.

С помощью скобки Пуассона уравнения Гамильтона для временной эволюции произвольной функции $F(q,p)$ записываются теперь как

$$\dot{F} = \{F, H\}.$$

9.3 Пуассоновы многообразия (О:35,35';Зам.:10;З:13;Т:2)

На первый взгляд скобка Пуассона никак не связана с коммутатором. Чтобы выявить эту связь обобщим понятие скобки Пуассона выявив при этом в явном виде связанную с ней геометрическую структуру.

Обобщённые координаты q^i являются координатами в некотором n-мерном *конфигурационном пространстве*. Обобщённые координаты q^i вместе с обобщёнными импульсами p_i являются координатами в некотором $2n$-мерном *фазовом пространстве*. В общем случае вовсе не обязательно требовать, чтобы в конфигурационном и фазовом пространствах существовали глобальные координаты (т.е. эти пространства могут не иметь атласов из одной карты), например если мы рассматриваем точку движущуюся по поверхности тора, то конфигурационным пространством является тор, а фазовым — кокасательное расслоение этого тора.

Также не обязательно проводить различие между обобщёнными координатами и обобщёнными импульсами: если есть скобка Пуассона, то любой набор скалярных функций Q^i, P_i, $i = 1,\ldots,n$ на фазовом пространстве, для которого выполняются условия

$$\{Q^i, P_j\} = \delta^i_j$$

может рассматриваться как набор обобщённых координат и канонически сопряжённых к ним импульсов.

Иногда не требуют даже существования таких обобщённых координат и импульсов, например мы можем рассматривать фазовое пространство нечётной размерности. Это может соответствовать тому, что не все точки фазового пространства соответствуют физически различным системам, например в электродинамике существуют калибровочные преобразования, которые меняют потенциалы, но не напряжённости электромагнитного поля. От таких симметрий обычно можно избавиться путём сужения фазового пространства, но часто бывает красивее сохранить такую симметрию.

Опр.29: Пусть на скалярных функциях на некотором многообразии (фазовом пространстве) задана скобка $\{\cdot,\cdot\}$ для которой выполняются свойства 1),2),3) входящие в определение алгебры Ли и дополнительное свойство
4) $\{FG, H\} = F\{G,H\} + G\{F,H\}$ — правило Лейбница.
Для пущей строгости следует потребовать ещё и непрерывность скобки в том же смысле, в котором мы требовали непрерывности в Опр.14 (непрерывность обычно всюду подразумевают, но не всегда явно прописывают). Такая скобка называется *скобкой Пуассона* и задаёт на многообразии *пуассонову структуру*. Многообразие со скобкой Пуассона — *пуассоново многообразие*.

Замечание 7: Выше в Замечании 6 было упомянута аналогия между правилом Лейбница и тождеством Якоби для коммутатора. Легко видеть, что свойство 4) — это другое свойство. Тождество Якоби брало в качестве умножения антисимметричную операцию взятия коммутатора. Свойство 4) предполагает, что у нас есть две операции: антисимметричная скобка Пуассона и симметричное умножение. Для каждого типа умножения мы имеем своё правило Лейбница (производная в обоих случаях определяется череаз скобку Пуассона).

Свойства перечисленные в Опр.29 позволяют записать скобку Пуассона в следующем виде

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial X^M}\,\{X^M, X^N\}\,\frac{\partial G}{\partial X^N} = \frac{\partial F}{\partial X^M}\,J^{MN}\frac{\partial G}{\partial X^N},$$

Где введён антисимметричный тензор $J^{MN} = \{X^M, X^N\}$ (если мы хотим, чтобы пуассонова структура не зависела от координат, то этот объект должен быть тензором).

Тензор J^{MN} полностью определяет пуассонову структуру.

Опр.29': *Пуассонова структура на многообразии* — это тензор J с компонентами J^{MN}, удовлетворяющий следующим условиям

а) $J^{MN} = -J^{NM}$ — антисимметричность,
б) $J^{KN}\partial_N J^{LM} + J^{MN}\partial_N J^{KL} + J^{LN}\partial_N J^{MK} = 0$ — тождество Якоби.

Тензор J позволяет превращать ковекторы в векторы. Комбинируя его с градиентом мы можем получать векторные поля из скалярных

$$(JdF)^M = J^{MN}\,(dF)_N = J^{MN}\,\partial_N F.$$

Теор.2. Выполняется следующее соотношение связывающее скобку Пуассона с коммутатором векторных полей

$$Jd\{F,G\} = -[JdF, JdG].$$

Задача 12: Доказать Теорему 2 (Указание: надо будет один раз применить тождество Якоби).

9.4 Симплектические многообразия (О:36)

Опр.30: Если $\det(J^{MN}) \neq 0$, то пуассоново многообразие называется *симплектическим многообразием.*

Для симплектического многообразия можно ввести тензор ω обратный к J

$$\omega_{KL}\,J^{LM} = \delta_K^M.$$

Антисимметричный тензор ω называется *симплектической структурой.* Он играет для симплектического многообразия роль во многом сходную с ролью метрики для (псевдо)риманова многообразия. Скобка Пуассона при этом появляется как <кососкалярное произведение> градиентов.

Локально симплектическая структура может быть представлена в через градиенты сопряжённых координат и импульсов

$$\omega_{MN} = (dp_i)_M(dq^i)_N - (dp_i)_N(dq^i)_M$$

Как мы увидим далее, для подобных антисимметризованных произведений существует удобное безкоординатное обозначение <$\wedge$>, с использованием которого

$$\omega = dp_i \wedge dq^i.$$

Очевидно, что симплектическая структура может существовать только на чётномерном многообразии.

10 Дифференциальные формы и поливекторы (начало) (О:37,38)

В дифференциальной геометрии особую роль играют полностью антисимметричные тензоры. Отчасти это обусловлено их связью с поверхностями вложенными в многообразие. Другая (возможно главная) причина популярности таких тензоров — их простота.

Опр.31: Тензор A с компонентами $A_{m_1\dots m_q}$ называется *полностью антисимметричным ковариантным тензором* или *дифференциальной формой степени* q (иногда просто *формой* или *q-формой*), если при перестановке любой пары индексов знак тензора меняется.

Опр.32: Тензор B с компонентами $B^{m_1\ldots m_q}$ называется *полностью антисимметричным контравариантным тензором* или *поливектором степени* q, если при перестановке любой пары индексов знак тензора меняется.

Минимальная степень дифференциальной формы (поливектора) — нуль, такая дифференциальная форма (и одновременно поливектор) — скаляр. Ковектор является дифференциальной формой степени один (вектор является поливектором степени один).

Очевидно, что отличные от нуля компоненты должны нумероваться наборами индексов без повторений. Отсюда, в частности, следует, что максимальная степень не равной нулю дифференциальной формы (поливектора) равна размерности многообразия.

10.1 Дифференциальные формы и поливекторы максимальной степени

Дифференциальная форма (поливектор) максимальной степени имеет только одну независимую компоненту и может быть записана как

$$A_{m_1\ldots m_n} = a\,\varepsilon_{m_1\ldots m_n}$$

$$\left(B^{m_1\ldots m_n} = b\,\varepsilon^{m_1\ldots m_n}\right).$$

Здесь $\varepsilon_{m_1\ldots m_n}$ ($\varepsilon^{m_1\ldots m_n}$) — полностью антисимметричный символ (не тензор!), который равен нулю, если среди его индексов присутствуют повторяющиеся, $+1$ — если индексы образуют чётную перестановку последовательности $1, 2, \ldots, n$, и -1 — если индексы образуют нечётную перестановку.

Дифференциальная форма (поливектор) максимальной степени полностью определяется своей компонентой $A_{12\ldots n}$ ($B^{12\ldots n}$) (для символа ε имеем $\varepsilon_{12\ldots n} = +1$, $\varepsilon^{12\ldots n} = +1$). Рассмотрим преобразование этой компоненты при замене координат

$$A_{1'\ldots n'} = a'\varepsilon_{1'\ldots n'} = a\,\varepsilon_{m_1\ldots m_n}\frac{\partial X^{m_1}}{\partial X^{1'}}\cdots\frac{\partial X^{m_n}}{\partial X^{n'}}$$

$$\left(B^{1'\ldots n'} = b'\varepsilon^{1'\ldots n'} = b\,\varepsilon^{m_1\ldots m_n}\frac{\partial X^{1'}}{\partial X^{m_1}}\cdots\frac{\partial X^{n'}}{\partial X^{m_n}}\right).$$

Таким образом (вспомните определение определителя!), $a' = a\,\frac{DX}{DX'}$ ($b' = b\,\frac{DX'}{DX}$).

То есть единственная (нетривиальная) компонента формы максимальной степени при замене координат преобразуется по той же формуле, по которой преобразуется элемент объёма, т.е. умножаясь на обратный якобиан преобразования. Компоненты поливектора множатся на прямой якобиан преобразования.

Это позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между дифференциальными формами и поливекторами максимальной степени, при условии, что и те и другие всюду отличны от нуля, положив $b = \frac{1}{a}$. Отметим, что для этого нам не понадобилась метрика.

11 Дифференциальные формы и поливекторы (продолжение) (О:;П:;У:)

Опр.33,34: Для дальнейшей работы удобно ввести операции *антисимметризации* и *симметризации*

$$A_{[m_q \dots m_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma(m_1 \dots m_q)} (-1)^{\Sigma(m_1 \dots m_q)} A_{\sigma(m_1 \dots m_q)}.$$

$$A_{(m_q \dots m_q)} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma(m_1 \dots m_q)} A_{\sigma(m_1 \dots m_q)}.$$

Сумма берётся по всем перестановкам $\sigma(m_1 \dots m_q)$ индексов $m_1 \dots m_q$. $\Sigma(m_1 \dots m_q)$ обозначает чётность перестановки, т.е. сколько раз надо менять местами пары индексов, чтобы вернуться к исходному порядку.

Опр.33,34 даны для ковариантных (нижних) индексов, очевидно, точно также можно определить (анти)симметризацию и для контравариантных (верхних). Однако, все индексы, по которым проводится (анти)симметризация должны быть одного типа.

Пример 9.

$$A_{[klm]} = \frac{1}{3!}(A_{klm} + A_{lmk} + A_{mkl} - A_{lkm} - A_{kml} - A_{mlk}).$$

$A_{(klm)}$ отличается от $A_{[klm]}$ лишь тем, что все знаки будут плюсами.

Пример 10.

$$A_{[k}B_{l]} = \frac{1}{2}(A_k B_l - A_l B_k).$$

Утверждение 1:

$$\begin{aligned}
A_{[\dots[\dots]\dots]} &= A_{[\dots\dots\dots]}, \\
A_{(\dots(\dots)\dots)} &= A_{(\dots\dots\dots)}, \\
A_{(\dots[-]\dots)} &= 0, \\
A_{[\dots(-)\dots]} &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь точки обозначают произвольные (возможно пустые) наборы индексов, одинаковые в левой и правой части равенства, а $<->$ обозначает набор из двух или более индексов.

Утверждение 2: Форма (поливектор) степени q на n-мерном многообразии имеет $C_n^q = \frac{n!}{q!\,(n-q)!}$ независимых компонент — это число способов, которым можно выбрать из n возможных значений индекса неупорядоченный набор из q различных чисел.

Задача 13: докажите Утверждение 1.

Задача 14: докажите Утверждение 2.

Таким образом, q-формы и $(n-q)$-формы, а также поливекторы степени q и $(n-q)$ имеют одинаковое число независимых компонент, но преобразуются эти компоненты по разным законам. Однако, как будет показано на одной из последующих лекций, при наличие формы объёма можно естественным образом установить взаимнооднозначное соответствие между q-формами и поливекторами степени $(n-q)$, а при наличии метрики различие между дифференциальными формами и поливекторами исчезает и между

q-формами(=поливекторами) и $(n-q)$-формами(=поливекторами) можно естественным образом установить взаимнооднозначное соответствие. Форма объёма и метрика могут быть введены разными способами, поэтому на данном этапе (до введения формы объёма и метрики) мы можем лишь установить взаимнооднозначное соответствие между формами и поливекторами максимальной степени.

При свёртке набора антисимметричных индексов полезно ввести следующие обозначения

$$A^{A\ldots\lfloor K_1\ldots K_k\rfloor B\ldots}{}_{C\ldots\lfloor K_1\ldots K_k\rfloor D\ldots} = \frac{1}{k!}A^{A\ldots K_1\ldots K_k B\ldots}{}_{C\ldots K_1\ldots K_k D\ldots}. \tag{7}$$

Если тензор антисимметричен как по верхним, так и по нижним сворачиваемым индексам можно вести суммирование по индексам заключённым в скобках $\lfloor\ \rfloor$ только по упорядоченным в наборам *не деля на* $k!$, это связано с тем, что разные наборы индексов $K_1\ldots K_k$ отличающиеся лишь порядком индексов дают одинаковый вклад в сумму.

Дифференциальные (поливекторы) формы можно разлагать по введённому на прошлой лекции n^q-мерному базису, тогда безкоординатная запись оказывается связанной с координатной формулой

$$A = A_{m_1\ldots m_q}\, dX^{m_1}\otimes\cdots\otimes dX^{m_q}, \tag{8}$$

$$B = B^{m_1\ldots m_q}\,\partial_{m_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{m_q}. \tag{9}$$

Однако при $q>1$, данные базисы являются избыточными, более того, ни один из базисных тензоров $dX^{m_1}\otimes\cdots\otimes dX^{m_q}$ ($\partial_{m_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{m_q}$) не является дифференциальной формой (поливектором), т.к. не антисимметричен. Наконец в суммах (8), (9) каждая независимая компонента повторяется $q!$ раз. Поэтому оказывается удобным для дифференциальных форм и поливекторов ввести специальные C_n^q-мерные базисы, в которых

$$A = \sum_{m_1<\cdots<m_q} A_{m_1\ldots m_q}\, dX^{m_1}\wedge\cdots\wedge dX^{m_q} = \frac{1}{q!}A_{m_1\ldots m_q}\, dX^{m_1}\wedge\cdots\wedge dX^{m_q}, \tag{10}$$

$$B = \sum_{m_1<\cdots<m_q} B^{m_1\ldots m_q}\,\partial_{m_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{m_q} = \frac{1}{q!}B^{m_1\ldots m_q}\,\partial_{m_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{m_q}, \tag{11}$$

где

$$dX^{m_1}\wedge\cdots\wedge dX^{m_q} = q!\,dX^{[m_1}\otimes\cdots\otimes dX^{m_q]} = \sum_{\sigma(m_1\ldots m_q)}(-1)^{\Sigma(m_1\ldots m_q)}dX^{\sigma(m_1}\otimes\cdots\otimes dX^{m_q)}, \tag{12}$$

$$\partial_{m_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{m_q} = q!\,\partial_{[m_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{m_q]} = \sum_{\sigma(m_1\ldots m_q)}(-1)^{\Sigma(m_1\ldots m_q)}\partial_{\sigma(m_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{m_q)}. \tag{13}$$

Опр.35: Тем самым мы определили операцию $<\wedge>$ — внешнее произведение дифференциальных форм для базисных форм $dX^{m_1}\wedge\cdots\wedge dX^{m_q}$, и поливекторов $\partial_{m_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{m_q}$, а значит и для произвольных форм и поливекторов (но ни в коем случае не внешнее произведение поливекторов и форм!).

Впрочем, такое определение не всегда удобно для практического применения.

12 Внешнее произведение и внешняя производная (О:;П:;Зам.:;У:;З:;)

Опр.35': *Внешним произведением* $A \wedge B$ тензоров (дифференциальных форм) A и B с компонентами $A_{m_1 \dots m_q}$ и $B_{n_1 \dots n_p}$ называется тензор с компонентами

$$(A \wedge B)_{m_1 \dots m_q n_1 \dots n_p} = \frac{(q+p)!}{q!\, p!} A_{[m_1 \dots m_q} B_{n_1 \dots n_p]}.$$

Внешнее произведение поливекторов определяется аналогично с заменой нижних индексов на верхние.

Утверждение 3: Если вспомнить множитель $\frac{1}{(q+p)!}$, который возникает при антисимметризации, и то, что каждый независимый член A (B) может предстать в $q!$ ($p!$) обличиях, то можно увидеть, что в окончательных формулах все числовые коэффициенты становятся равными ± 1.

Пример 11. Внешнее произведение двух 1-форм (ковекторов)

$$A \wedge B = A \otimes B - B \otimes A,$$
$$(A \wedge B)_{km} = A_k B_m - A_m B_k.$$

Пример 12. Внешнее произведение 1-формы A и 2-формы B

$$(A \wedge B)_{klm} = A_k B_{lm} + A_l B_{mk} + A_m B_{kl}. \tag{14}$$

Утверждение 4: Если A — q-форма, а B — p-форма, то

$$A \wedge B = (-1)^{qp}\, B \wedge A.$$

Пример 13. Пусть $A = dt \wedge dx + dy \wedge dz$, где t, x, y, z — координаты в 4-мерном пространстве, тогда

$$A \wedge A = 2\, dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Задача 15: Проверить Примеры 11, 12, 13.

Опр.36: *Внешней производной* от q-формы A называется $(q+1)$-форма dA с компонентами

$$(dA)_{m_0 m_1 \dots m_q} = (q+1)\, \partial_{[m_0} A_{m_1 \dots m_q]}.$$

Для скаляра внешняя производная совпадает с градиентом.

Задача 16: Проверить, что компоненты объекта dA, определённого в Опр.36 действительно преобразуются как компоненты антисимметричного тензора имеющего $q+1$ нижний индекс.

Замечание 8: Формулу для внешней производной легко запомнить с помощью следующего мнемонического правила

$$dA = \partial \wedge A.$$

Замечание 9: Мы не можем определить внешнюю производную для поливектора т.к. индекс у производной стоит снизу, а антисимметризовать можно только индексы одного типа.

Утверждение 5: Для внешней производной и внешнего произведения q-формы A и p-формы B справедливо следующее правило Лейбница

$$d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^q A \wedge dB$$

Утверждение 6: $d^2 = 0$, т.е. $ddA = 0$ для любой формы A. Это утверждение следует из симметричности второй производной и Утверждения 1.

Опр.37: Если для формы $dF = 0$, то форма F называется *замкнутой.*

Опр.38: Если $F = dA$, то форма F называется *точной.*

Замечание 10: Всякая точная форма замкнута.

Используя Замечание 8 и Примеры 11, 12 легко получить Примеры 14, 15.

Пример 14. Внешняя производная 1-формы (ковектора) A

$$(dA)_{km} = \partial_k A_m - \partial_m A_k.$$

Пример 15. Внешняя производная 2-формы F

$$(dF)_{klm} = \partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk} + \partial_m F_{kl}.$$

Пример 16. (физический пример) Примеры 14, 15 и Утверждение 6 напрямую связаны с электродинамикой. Четырёхмерный потенциал электромагнитного поля — ковектор A. Его внешняя производная — тензор напряжённости электромагнитного поля $F = dA$. Равенство нулю внешней производной от F, т.е. $dF = ddA = 0$ — равносильно первой паре уравнений Максвелла, которая не содержит источников (источники — плотности заряда и тока).

Пример 17. Пусть $A = \frac{q}{r}\, dt$ — кулоновский потенциал в пространстве Минковского. Тогда $F = dA = d\frac{q}{r} \wedge dt = -\frac{q}{r^2}\, dr \wedge dt = \frac{q}{r^2}\, dt \wedge dr$ — напряжённость кулоновского поля.

13 Интегрирование дифференциальных форм (О:;П:;Зам.:;Т:)

Вернёмся к дифференциальным формам максимальной ($q = n$) степени. Для таких форм с единственной нетривиальной компонентой $A_{12\ldots n}$ справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned}
&A_{m_1\ldots m_n} = A_{12\ldots n}\varepsilon_{m_1\ldots m_n},\\
&A = A_{12\ldots n}\, dX^1 \wedge dX^2 \wedge \cdots \wedge dX^n.
\end{aligned}$$

При этом $A_{12\ldots n}$ преобразуется при замене координат как элемент объёма, что позволяет записать инвариантный интеграл по области $\mathbf{U}$

$$\int\limits_{\mathbf{U}} A_{12\ldots n} dX^1 dX^2 \ldots dX^n.$$

Возникает непроизвольное желание отождествить $dX^1 \wedge dX^2 \wedge \cdots \wedge dX^n$ и $dX^1 dX^2 \ldots dX^n$. Однако, первое — базисная n-форма, а второе — бесконечномалый элемент n-мерного объёма. Но так ли страшно это различие? Дифференциал под знаком интеграла нужен, чтобы указать переменные интегрирования, а фактически, элемент объёма и то, как он преобразуется, а преобразуется он — как базисная n-форма.

Опр.39: Интеграл от n-формы A по n-мерной области $\mathbf{U}$ определяется и записывается следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbf{U}} A = \int\limits_{\mathbf{U}} A_{12\dots n}\, dX^1 \wedge dX^2 \wedge \dots \wedge dX^n = \int\limits_{\mathbf{U}} A_{12\dots n}\, dX^1 dX^2 \dots dX^n.$$

Приведённое выше определение применимо в случае, когда область U покрывается одной картой. Для того, чтобы проинтегрировать форму по всему пространству можно использовать *разбиение единицы.*

Опр.40: Пусть $\psi_{(i)} : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ — скалярные функции, такие, что во всех точках выполняются условия

$$\sum_i \psi_{(i)} = 1, \quad 0 \le \psi_{(i)} \le 1, \quad \psi_{(i)}(X)|_{X \notin U_i} = 0, \tag{15}$$

где U_i — i-я карта многообразия $\mathbf{M}$. Тогда набор функций $\psi_{(i)}$ называется *разбиением единицы.*

Опр.41:

$$\int\limits_{\mathbf{M}} A = \sum_i \int\limits_{U_i} \psi_{(i)} A. \tag{16}$$

В принципе для определения интегрирования q-формы по q-мерной поверхности и в случае $q < n$ достаточно сослаться на отождествление dX^m как дифференциала и как формы, но мы рассмотрим более интересный путь.

Чтобы определить более подробно интегрирование q-формы по q-мерной поверхности в случае $q < n$ определим ограничение формы на поверхность.

Форма является тензором, поэтому

$$A_{m'_1 \dots m'_q} = A_{m_1 \dots m_q} \frac{\partial X^{m_1}}{\partial X^{m'_1}} \cdots \frac{\partial X^{m_q}}{\partial X^{m'_q}}. \tag{17}$$

Раньше мы рассматривали случай, когда координаты X и X' были разными координатами на одном пространстве, функции $X(X')$ задают замену координат. Пусть теперь X — координаты на n-мерном многообразии $\mathbf{M}$, а X' — координаты на q-мерном многообразии $\mathbf{V}$. Тогда функции $X(X')$ задают не замену координат, а вложение $\mathbf{V}$ в $\mathbf{M}$. Тем самым мы определяем в $\mathbf{M}$ поверхность $X(\mathbf{V})$ на которой заданы координаты X'.

Опр.42: Теперь формула (17) задаёт *проекцию X^*A ковариантного тензора A на поверхность $X(\mathbf{V})$.*

Замечание 11: На вводной лекции мы уже сталкивались с частным случаем проекции ковариантного тензора на поверхность когда рассматривали индуцируемую на поверхности метрику. Тогда отмечалось, что мы можем рассматривая dX^m как дифференциалы координат выразить их через дифференциалы координат на поверхности $dX^{m'}$ и подставить в формулу разложения тензора по естественному базису. Этот рецепт работает и в общем случае.

Замечание 12: Обратите внимание, при $q < n$ мы уже не можем обратить матрицу $\frac{\partial X}{\partial X'}$, а значит при отображении $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ мы можем отображать тензоры с нижними индексами в обратную сторону из $\mathbf{M}$ на $\mathbf{V}$ (при этом ковариантный тензор A в пространстве $\mathbf{M}$ превращается в ковариантный тензор $\varphi^* A$ в пространстве $\mathbf{V}$), а тензоры с верхними индексами из $\mathbf{V}$ в $\mathbf{M}$ (при этом контравариантный тензор B в пространстве $\mathbf{V}$ превращается в контравариантный тензор $\varphi_* B$ в пространстве $\mathbf{M}$, последний оказывается определен не на всём пространстве, $\mathbf{M}$, а только на $X(\mathbf{V})$, где может быть определён неоднозначно, в случае если у точки больше одного прообраза).

Опр.43: Интеграл от q-формы по q-мерной поверхности в n-мерном пространстве — это интеграл от проекции формы на эту поверхность

$$\int\limits_{\varphi(\mathbf{V})} A = \int\limits_{\mathbf{V}} \varphi^* A. \tag{18}$$

Теор.3. (*Теорема Стокса*)

$$\int\limits_{\mathbf{U}} d\omega = \int\limits_{\partial\mathbf{U}} \omega.$$

Здесь $\partial\mathbf{U}$ — соответствующим образом ориентированная граница поверхности $\mathbf{U}$.

Пример 18. Пусть t, r, θ, ϕ — координаты в пространстве Минковского (r, θ, ϕ — сферические координаты)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2).$$

Пусть тензор напряжённости электромагнитного поля задаётся как

$$F = \mu \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi. \tag{19}$$

Это соответствует магнитному заряду μ в точке $r = 0$. Тогда магнитный поток через поверхность $\mathbf{S}$, задаваемую условиями $t = const$, $r = const$ задаётся интегралом

$$\Phi_m = \int\limits_{\mathbf{S}} F.$$

На поверхности $\mathbf{S}$ мы можем ввести координаты θ, ϕ, в которых ограничение F на $\mathbf{S}$ по-прежнему задаётся формулой (19), так что

$$\Phi_m = \int\limits_{\mathbf{S}} \mu \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi\, \mu = 4\pi\mu.$$

Мы могли бы применить Теорему Стокса, но введённые координаты t, r, θ, ϕ имеют особенность при $r = 0$, а при $r \neq 0$ $dF = 0$. Перейдём поэтому к координатам t, $x = r \sin\theta\, \cos\phi$, $y = r\sin\theta\, \sin\phi$, $z = r\cos\theta$ в которых

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Можно вычислить, что в этих координатах

$$dF = 4\pi\mu\delta(x)\delta(y)\delta(z)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Поскольку $dF \neq 0$, не существует потенциала A, такого, что $F = dA$. Однако потенциал можно ввести, если провести разрез от магнитного заряда до бесконечности. Отсутствие магнитных зарядов оказывается, таким образом, связано с существованием глобального (т.е. заданного на всей области) потенциала.

Мы можем рассматривать поле F только в области вне магнитных зарядов. Для пространства Минковского из $dF = 0$ следует, что существует потенциал A, такой, что $F = dA$, но после выкидывания из области определения поля F мировых линий магнитных зарядов потенциал оказывается определён только локально — для областей, через которые не проходят выкинутые мировые линии. Таким образом, магнитные заряды оказываются связанными с топологией области определения поля F.

14 Поверхности (О:;Зам.:)

Опр.44: q-мерная поверхность $\mathbf{U} \subset \mathbf{M}$ может задаваться как образ (или замыкание образа) гладкого отображения $f : \mathbf{U}_0 \to \mathbf{M}$, т.е. $\mathbf{U} = f(\mathbf{U}_0)$, где $\mathbf{U}_0$ — некоторое q-мерное многообразие, причём ранг матрицы $\frac{\partial f^M}{\partial \xi^m}$, где ξ^m, $m = 1, \dots, q$ координаты на $\mathbf{U}_0$, равен q.

Такой способ задания поверхности называется *явным*.

При явном описании поверхности $\mathbf{U}$ существует произвол в выборе координат на $\mathbf{U}_0$, т.е. описание включает q произвольных скалярных функций $\xi^m : \mathbf{U}_0 \to \mathbb{R}$.

Дифференциальные операторы $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ представляют собой касательные векторы к поверхности и образуют базис в касательном пространстве. Их внешние произведения представляют собой касательные поливекторы

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial \xi^{i_k}}.$$

Эти поливекторы заданы на $\mathbf{U}_0$, но операция f_* позволяет перенести их на $\mathbf{U} \in \mathbf{M}$.

Роль касательного вектора для кривой выполняет касательный поливектор степени q. Такой поливектор определяется почти однозначно — с точностью до скалярного множителя. Этот множитель можно было бы фиксировать, если бы на поверхности был задан поливектор максимальной степени.

Альтернативный способ описания поверхностей — неявный.

Опр.45: Ориентированная поверхность без границы описывается системой уравнений $\varphi = c$, где $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^{n-q})$, $c = (c^1, \dots, c^{n-q})$ — наборы скалярных функций и констант, причём ранг матрицы $\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^M}$ равен $n - q$ в точках $p \in \mathbf{U}$. Т.е.

$$\mathbf{U} = \{p \in \mathbf{M} | \varphi^\alpha(p) = c^\alpha,\ \alpha = 1, \dots, n - q\}. \tag{20}$$

Опр.46: Ориентация поверхности определяется следующим условием: в каждой точке $p \in \mathbf{U}$ базисные формы $d\xi^m$ на поверхности $\mathbf{U}$ вместе с градиентами $d\varphi^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n - q$ должны образовывать правый базис в кокасательном пространстве.

Опр.47: Ориентируемая поверхность с границей $<$вырезается$>$ из ориентируемой поверхности без границы условием $\varphi^0 \geq c^0$, где φ^0 — ещё одна гладкая скалярная функция, причём ранг матрицы $\frac{\partial \varphi^{\tilde\alpha}}{\partial X^M}$, где $\tilde\alpha = 0, \dots, n - q$ равен $n - q + 1$ в точках границы $p \in \partial\mathbf{U}$. Т.е.

$$\mathbf{U} = \{p \in \mathbf{M} | \varphi^\alpha(p) = c^\alpha,\ \alpha = 1, \dots, n - q;\ \varphi^0 \geq c^0\}. \tag{21}$$

Опр.48: *Граница* ($\partial\mathbf{U}$) определяется условием (20), взятым для значения q на 1 меньше. Последняя скалярная функция и соответствующая константа определяются как

$$\varphi^{n-q+1} = -\varphi^0, \qquad c^{n-q+1} = -c^0 \tag{22}$$

(нумерация и знак определяются соответствием с общепринятыми соглашениями для ориентации поверхности и границы).

Замечание 13: Легко видеть, что граница границы ($\partial\partial\mathbf{U}$) — пустое множество. Т.е. $\partial^2 = 0$ (здесь ∂ — операция взятия границы).

Опр.49: Если $\partial\mathbf{U} = \emptyset$, то поверхность $\mathbf{U}$ — *цикл*.

Замечание 14: Всякая граница является циклом. Обратное верно не для всех пространств.

Пример 19. В пространстве $\mathbb{R}^n$ всякий цикл является границей.

Пример 20. В пространстве $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ (трёхмерное пространство с выколотой точкой) всякая замкнутая двумерная поверхность является циклом. При этом она является границей тогда, и только тогда, когда не охватывает выколотую точку. Замкнутая поверхность охватывающая выколотую точку является циклом, но не границей.

15 Дифференциальные формы и поверхности (О:;У:)

Итак, мы можем интегрировать дифференциальную форму A степени q по q-мерной поверхности $\mathbf{U}$

$$\int\limits_{\mathbf{U}} A.$$

Операция интегрирования линейна по форме, т.е.

$$\int\limits_{\mathbf{U}} \alpha A + \beta B = \alpha \int\limits_{\mathbf{U}} A + \beta \int\limits_{\mathbf{U}} B,$$

где A и B — q-формы, а α и β — вещественные числа.

Мы можем определить также сложение q-мерных поверхностей и умножение их на вещественное число так, чтобы операция интегрирования стала линейна и по поверхности

$$\int\limits_{\alpha\mathbf{U}+\beta\mathbf{V}} A = \alpha \int\limits_{\mathbf{U}} A + \beta \int\limits_{\mathbf{V}} A,$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — q-мерные поверхности, а α и β — вещественные числа.

Таким образом, мы можем рассматривать q-мерные поверхности как линейные функционалы на пространстве q-форм, т.е. q-мерные поверхности можно рассматривать как объекты пространства дуального к пространству q-форм. [1]

Опр.50: Пространство X^* дуальное к линейному пространству X — это пространство линейных функционалов, ставящих в соответствие объектам из X вещественные числа. Действие объекта $\xi \in X^*$ на $x \in X$ записывается как $\langle \xi, x\rangle \in \mathbb{R}$.

$$\langle \xi, \alpha x + \beta z\rangle = \alpha\langle \xi, x\rangle + \beta\langle \xi, z\rangle,$$

[1] Вообще говоря, следовало бы обращать внимание на области определения и потребовать, например, компактности поверхностей, чтобы интеграл был определён для любой q-формы по любой q-мерной поверхности, или компактности носителя q-формы.

где $\xi \in X^*$, $x, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Пространство X^* имеет естественную структуру линейного пространства:

$$\langle \alpha\xi + \beta\zeta, x \rangle = \alpha\langle \xi, x \rangle + \beta\langle \zeta, x \rangle,$$

где $\xi, \zeta \in X^*$, $x \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Утверждение 7: Итак, мы выяснили, что q-мерные поверхности (по крайней мере компактные) можно рассматривать как элементы пространства дуального к пространству q-форм:

$$\langle \mathbf{U}, A \rangle = \int\limits_{\mathbf{U}} A.$$

Утверждение 8: Однако, есть и другой естественный способ задания линейных функционалов на q-формах:

$$\langle u, A \rangle = \int\limits_{\mathbf{M}} u \wedge A,$$

здесь A — q-форма, u — $(n-q)$-форма, а интегрирование ведётся по всему n-мерному многообразию $\mathbf{M}$.[2]

Таким образом, поверхности размерности $n-q$ (т.е. коразмерности q) оказываются во многом аналогичны формам степени q. Эту аналогию можно провести и дальше.

Мы можем действовать на дифференциальные формы операцией взятия внешней производной d, которая повышает степень формы на 1, причём $d^2 = 0$, т.е. $ddA = 0$ для любой формы A.

Мы можем действовать на поверхности операцией взятия границы ∂, которая уменьшает размерность поверхности на 1 (т.е. увеличивает коразмерность на 1), причём $\partial^2 = 0$, т.е. $\partial\partial\mathbf{U} = 0$ для любой поверхности $\mathbf{U}$.

<По образу и подобию> границы и цикла введём ещё два определения.

Опр.51,52:

- Знаем: $\partial\mathbf{U}$ — *граница* поверхности $\mathbf{U}$,
- Вводим: dA — *кограница* формы A,
- Знаем: если $\partial\mathbf{U} = 0$, то $\mathbf{U}$ — *цикл*,
- Вводим: если $dA = 0$, то A — *коцикл.*

Можно показать, что дифференциальную q-форму можно рассматривать как непрерывное распределение поверхностей коразмерности q, а поверхности можно рассматривать как сингулярные дифференциальные формы специального вида.

Пусть

$$\mathbf{U} = \{x | f_\alpha(x) = 0,\ \alpha = 1, \dots, q;\ f_0(x) > 0\}$$

— некоторая поверхность. Её граница задаётся как

$$\partial\mathbf{U} = \{x | f_\alpha(x) = 0,\ \alpha = 0, \dots, q\}.$$

[2] Здесь снова надо следить за областями определения, например можно потребовать, чтобы многообразие $\mathbf{M}$ было компактно, или чтобы q-формы (или $(n-q)$-формы) имели компактный носитель. Как и обычно, суживая пространство X мы получаем возможность расширить дуальное пространство X^*.

Построим дифференциальную форму соответствующую поверхности $\mathbf{U}$. В качестве промежуточного шага рассмотрим форму $u_{(0)} = df_1 \wedge \cdots \wedge df_q$. Форма $u_{(0)}$ описывает семейство поверхностей $f_\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha = 1, \ldots, q$. $u_{(0)}$ можно назвать нормалью к этому семейству поверхностей (метрики у нас по прежнему нет!), поскольку для каждого вектора v^k касательного к одной из поверхностей этого семейства, т.е. для которого

$$v^k \, \partial_k f_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, q \tag{23}$$

выполняется равенство

$$v^{k_1} u_{(0)k_1 \ldots k_q} = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) удобнее, чем (23) тем, что форма $u_{(0)}$ (и соответствующее ей семейство поверхностей) могут быть описаны аналогичным образом с помощью функций отличных от f_α.

Форму $u_{(0)}$ следует определённым образом модифицировать.[3]

$$u = \theta(f_0)\, d\theta(f_1) \wedge \cdots \wedge d\theta(f_q) = \theta(f_0)\delta(f_1) \ldots \delta(f_q)\, df_1 \wedge \cdots \wedge df_q = \theta(f_0)\delta(f_1) \ldots \delta(f_q)\, u_0.$$

<u>**Утверждение 9:**</u> Форма u соответствует поверхности $\mathbf{U}$, а форма $(-1)^{q+1} du$ (знак учитывает ориентацию границы) соответствует границе $\partial\mathbf{U}$

$$du = d\theta(f_0) \wedge d\theta(f_1) \wedge \cdots \wedge d\theta(f_q) = \delta(f_0)\delta(f_1) \ldots \delta(f_q)\, df_0 \wedge \cdots \wedge df_q = \delta(f_0)\delta(f_1) \ldots \delta(f_q)\, df_0 \wedge u_0.$$

Покажем, как теорема Стокса для формы произвольной степени q может быть выведена из теоремы Стокса для формы степени $q-1$ (здесь u — q-форма, а A — $(n-q-1)$-форма)

$$\int\limits_{\mathbf{U}} dA = \int\limits_{\mathbf{M}} u \wedge dA = \int\limits_{\mathbf{M}} (-1)^q [d(u \wedge A) - du \wedge A] = (-1)^q \int\limits_{\mathbf{M}} d(u \wedge A) + (-1)^{q+1} \int\limits_{\mathbf{M}} du \wedge A$$

К первому интегралу применим теорему Стокса

$$\int\limits_{\mathbf{U}} dA = (-1)^q \int\limits_{\partial\mathbf{M}} d(u \wedge A) + (-1)^{q+1} \int\limits_{\mathbf{M}} du \wedge A$$

Мы предполагаем, что $\partial\mathbf{M} = 0$, либо, что $u \wedge A$ обращается на $\partial\mathbf{M}$ в нуль вместе с первыми производными, отсюда следует, что первый интеграл обращается в нуль. Вспоминая ещё раз теорему Стокса получаем

$$\int\limits_{\mathbf{U}} dA = (-1)^{q+1} \int\limits_{\mathbf{M}} du \wedge A = \int\limits_{\partial\mathbf{U}} A$$

[3] Напомним, некоторые свойства θ-функции Хевисайда и δ-функции Дирака (обе эти функции следует понимать как обобщённые функции из некоторого пространства, например $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) = f(0), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x).$$

Поскольку $\partial\mathbf{U}$ соответствует $(-1)^{q+1}\,du$, где q — степень формы u (т.е. коразмерность $\mathbf{U}$) теорема доказана.

Теорема Стокса для интегрирования по поверхности $\mathbf{U}$ свелась к теореме Стокса для интегрирования по всему пространству $\mathbf{M}$ и правилу Лейбница для внешней производной.

16 Свёртка дифференциальных форм и поливекторов

Если заданы дифференциальная форма A и поливектор B с компонентами $A_{M_1\dots M_q}$ и $B^{N_1\dots N_p}$, то можно ввести тензоры следующего вида

$$(A,B)^{(k)}_{M_{k+1}\dots M_q}{}^{N_{k+1}\dots N_p} = A_{\lfloor K_1\dots K_k\rfloor M_{k+1}\dots M_q} B^{\lfloor K_1\dots K_k\rfloor N_{k+1}\dots N_p}, \tag{25}$$

$$(A,B)^{(k)}_{M_1\dots M_{q-k}}{}^{N_1\dots N_{p-k}} = A_{M_1\dots M_{q-k}\lfloor K_1\dots K_k\rfloor} B^{N_1\dots N_{p-k}\lfloor K_1\dots K_k\rfloor}. \tag{26}$$

Индекс (k) указывает число индексов, по которым производилась свёртка. Очевидно $k \le \min(q,p)$. В случаях, когда это не может привести к неоднозначности в прочтении формул, (k) будет опускаться. Две определённые выше скобки различаются лишь знаком (и то не всегда).

Определяемый тензор не является дифференциальной формой или поливектором при произвольных q, p и k (т.е. тензор не будет антисимметричен по всем индексам), но если $k=q$, то $(A,B)^{(q)}$ будет поливектором, а если $k=p$, то $(A,B)^{(p)}$ будет дифференциальной формой.

17 Дифференциальные формы и поливекторы в присутствии формы объёма (O:)

<u>Опр.53:</u> Определим форму объёма Ω как

$$\begin{aligned} \Omega_{M_1\dots M_n} &= f(X)\,\varepsilon_{M_1\dots M_n}, \\ \Omega &= f(X)\,dX^1\wedge\dots\wedge dX^n. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь $\varepsilon_{M_1\dots M_n}$ — полностью антисимметричный символ, $\varepsilon_{1\dots n}=+1$. $f:\mathbf{M}\to\mathbb{R}$ — неотрицательный скаляр.

<u>Опр.54:</u> Даже в отсутствие метрики, если $f(X)>0$, мы можем определить контравариантные компоненты формы объёма

$$\check\Omega^{M_1\dots M_n} = f^{-1}(X)\,\varepsilon^{M_1\dots M_n}. \tag{28}$$

$$\check\Omega = \frac{1}{f(X)}\,\partial_1\wedge\dots\wedge\partial_n. \tag{29}$$

Здесь антисимметричный символ $\varepsilon^{M_1\dots M_n}$ совпадает с $\varepsilon_{M_1\dots M_n}$.

Введённый здесь поливектор $\check\Omega$ несёт акцент для того, чтобы в присутствии метрики отличаться от поливектора Ω, полученного из формы объёма поднятием индексов с помощью метрики. $\check\Omega$ и Ω могут отличаться знаком ($\Omega=\sigma\check\Omega$).

Здесь и далее

$$\sigma = \operatorname{sgn}\det(g_{MN}).$$

Легко убедиться, что

$$\begin{aligned}
(\Omega,\check{\Omega})^{(n)} &= 1, \\
(\Omega,\check{\Omega})^{(n-1)N}_{M} &= \delta^N_M, \\
&\dots, \\
(\Omega,\check{\Omega})^{(n-k)}_{M_1\dots M_k}{}^{N_1\dots N_k} &= k!\delta^{[N_1}_{M_1}\dots\delta^{N_k]}_{M_k}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Опр.55: Используя форму Ω и поливектор $\check{\Omega}$ можно ввести операцию $*$, превращающую поливектор B степени p в дифференциальную форму $*B$ степени $n-p$, и обратную операцию $*^{-1}$, превращающую форму A степени q в поливектор $*^{-1}A$ степени $n-q$:

$$* B = (\Omega, B)^{(p)}, \tag{31}$$

$$*^{-1}A = (A,\check{\Omega})^{\underline{(q)}}. \tag{32}$$

Таким образом

$$(*B)_{m_{p+1}\dots m_n} = \frac{f(X)}{p!}\,B^{m_1\dots m_p}\varepsilon_{m_1\dots m_n}.$$

Легко увидеть, что если какая-то компонента поливектора B степени p нумеруется индексами $m_1,\dots,m_p$, то после операции ходжевской дуальности ей соответствует компонента $(n-p)$-формы $*B$, которая нумеруется индексами $l_{p+1},\dots,l_n$, причём $m_\alpha \neq l_\beta$, $\alpha = 1,\dots,p$, $\beta = p+1,\dots,n$. Отсюда следует, что $*$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между p-поливекторами и $(n-p)$-формами.

Используя формулы (30) легко видеть, что

$$*^{-1} * B = B,$$

$$* *^{-1} A = A.$$

Таким образом, установлено взаимно-однозначное соответствие между дифференциальными формами степени q и поливекторами степени $n-q$.

Опр.56: Заданный на дифференциальных формах оператор внешнего дифференцирования d, повышающий степень формы на 1, позволяет ввести на поливекторах оператор взятия дивергенции δ, понижающий степень поливектора на 1:

$$\delta = *^{-1}d * .$$

$$(\delta A)^{M_1\dots M_{q-1}} = \frac{1}{f(X)}\partial_{M_q}\left(f(X)A^{M_1\dots M_q}\right). \tag{33}$$

Опр.57: Наряду с операторами $*$ и $*^{-1}$ введём ещё пару операторов $\check{*}$ и $\check{*}^{-1}$, отличающихся от них знаками

$$\check{*}B = (\Omega, B)^{\underline{(p)}}, \tag{34}$$

$$\check{*}^{-1}A = (A,\check{\Omega})^{(q)}. \tag{35}$$

Запишем также следующую полезную формулу для формы A и поливектора B одинаковой степени

$$*(A,B) = A\wedge(*B) = (\check{*}B)\wedge A = *(*B,\check{*}^{-1}A) = *(\check{*}B,*^{-1}A). \tag{36}$$

18 Дифференциальные формы в присутствии метрики (О:;З:)

Как уже отмечалось ранее, единственная компонента формы максимальной степени (n-формы, где n — размерность многообразия) преобразуется как элемент объёма, поскольку корень из определителя метрики преобразуется как раз таким образом, мы можем ввести форму объёма по имеющейся метрике. Далее мы используем обозначение $g = \det(g_{mk})$.

Опр.58: Форма

$$\Omega = \sqrt{|g|}\, dX^1 \wedge \cdots \wedge dX^n = \sqrt{|g|}\, d^n X$$

называется *элементом объёма* или *формой объёма порождённой метрикой* g_{mk}.

Задача 17: показать, что Опр.58 определяет тензор.

В компонентной записи

$$\Omega_{m_1 \dots m_n} = \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{m_1 \dots m_n}.$$

Если поднять все индексы (а теперь мы можем это сделать, раз у нас есть метрика), то получится

$$\Omega^{m_1 \dots m_n} = \frac{\sqrt{|g|}}{g}\, \varepsilon^{m_1 \dots m_n} = \frac{\operatorname{sgn}(g)}{\sqrt{|g|}}\, \varepsilon^{m_1 \dots m_n}.$$

Покажем, что Ω действительно является тензором. При замене координат метрика преобразуется как

$$g_{m'k'} = \frac{\partial X^m}{\partial X^{m'}}\, g_{mk}\, \frac{\partial X^k}{\partial X^{k'}}.$$

Возьмём определитель от этого равенства

$$g' = \left(\frac{DX}{DX'}\right)^2 g.$$

Мы видим, что $\sqrt{|g|}$ преобразуется как элемент объёма, что и требуется для того, чтобы объект Ω был тензором.

Чтобы проверить, что определённая выше форма объёма соответствует нашему обычному представлению об объёме диагонализуем метрику в какой-либо точке, тогда в этой точке базисные вектора $\frac{\partial}{\partial X^k}$ будет иметь длину $\sqrt{|g_{kk}|}$, а натянутый на них элемент объёма равен $\sqrt{|\prod_{k=1}^n g_{kk}|} = \sqrt{|\det(g_{mk})|}$.

Поскольку у нас появилась метрика мы можем не различать формы и поливекторы. Мы можем теперь установить естественное взаимнооднозначное соответствие между q-формами и $(n-q)$-формами с помощью операции $*$.

С помощью операции $(\cdot,\cdot)^{(\cdot)}$ естественно определяется теперь норма дифференциальной q-формы A.

Опр.59: *Норма* $\|A\|$ *дифференциальной* q*-формы* A — это скаляр определяемый равенством

$$\|A\|^2 = (A, A)^{(q)}.$$

Замечание 15: Иногда нормой формы A называют число $\|A\|_\int$

$$\|A\|^2_\int = \int\limits_{\mathbf{M}} \|A\|^2 \Omega.$$

Норма заданная Опр.59 относится к значению формы в точке, тогда как норма $\|A\|_\int$ описывает форму в целом, как поле.

Теперь

$$\check{*} = \sigma *^{-1}, \qquad \check{*}^{-1} = \sigma \, * \, . \tag{37}$$

Для дуальной q-формы мы можем записать следующие полезные тождества

$$\begin{aligned} \| * A\|^2 &= \sigma \|A\|^2, & (38)\\ (*A, *A)_{MN} &= \sigma \left(\|A\|^2 \, g_{MN} - (A, A)_{MN} \right), & (39)\\ * * A &= \sigma (-1)^{q(D-q)} A. & (40) \end{aligned}$$

В присутствие метрики оператор дивергенции $\delta = *^{-1} d *$ выражается через оператор ковариантной производной ∇ (см. последующие лекции), определённый с помощью согласованной с метрикой симметричной связности (см. последующие лекции):

$$(\delta A)^{M_1 \dots M_{q-1}} = (\nabla, A)^{\underline{(1)}\, M_1 \dots M_{q-1}} = \nabla_{M_q} A^{M_1 \dots M_q} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{M_q} \left(\sqrt{|g|} A^{M_1 \dots M_q} \right), \tag{41}$$

Лапласиан $\Box$ от q-формы A определятся формулой

$$\Box A = (-1)^q (\delta d - d \delta) A. \tag{42}$$

Для 0-формы (скаляра) лапласиан — оператор Бельтрами-Лапласа

$$\Box \varphi = \nabla_M \nabla^M \varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_M \sqrt{|g|} \, g^{MN} \partial_N \varphi. \tag{43}$$

Для скаляра $\Box = \nabla_M \nabla^M$. Если $q > 0$, то для произвольной метрики в $\Box$ появляются дополнительные члены линейные по кривизне. Так в случае $q = 1$

$$(\Box A)_K = \nabla_M \nabla^M A_K - R_K{}^M A_M, \tag{44}$$

где $R_K{}^M$ — тензор Риччи (см. последующие лекции), построенный по симметричной связности, согласованной с метрикой.

Задача 18: Вычислить $\|\Omega\|^2$.

Задача 19: Вычислить $\|\Omega\|_\int$ для единичной сферы.

Задача 20: Показать, что для любой q-формы A на n-мерном многообразии $\mathbf{M}$ с метрикой g_{mk} выполняется соотношение (40).

Иногда операцию d (внешнюю производную) называют градиентом дифференциальных форм, а операцию δ — дивергенцией.

Для 1-формы операция δ задаёт обычную дивергенцию (раз у нас есть метрика, мы можем не различать векторы и 1-формы). Правда мы пока не можем проверить, что это действительно <обычная дивергенция>, поскольку понятие ковариантной производной ещё не было введено.

Пример 21. Рассмотрим 3-мерное евклидово пространство. До тех пор, пока мы работаем в декартовых координатах (т.е. пока метрика имеет вид $g_{mk} = \delta_{mk}$, $m, k = 1, 2, 3$) верхние и нижние индексы можно не различать. Пусть $H = (H_1, H_2, H_3)$ — вектор, тогда

$$(*H)_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как обычно, первый индекс нумерует строки, а второй столбцы. Легко проверить, что $**H = H$.

<u>**Пример 22.**</u> При переходе от 3-мерного пространства к 4-мерному пространству-времени 3-мерные вектора могут превращаться в пространственную часть 4-мерных векторов, но это не единственный способ. Можно сперва превратить 3-мерный вектор в 3-мерную 2-форму (представляемую антисимметричной матрицей), а потом дополнить 3-мерную 2-форму до 4-мерной 2-формы добавив 3 дополнительные компоненты (строка и столбец с номером 0). Эти дополнительные компоненты образуют ещё один 3-мерный вектор $E = (E_1, E_2, E_3)$.

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Именно так при переходе от 3-мерной геометрии к 4-мерной два 3-мерных вектора электрического и магнитного полей объединяются в 2-форму электромагнитного поля F (не все знаки в этих заметках совпадают с общепринятыми, впрочем, иногда существует несколько <общепринятых> выборов знаков). В если метрика задана как $g_{mk} = \eta_{mk} = \pm\mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$, и $\varepsilon_{0123} = +1$, то $*F$ записывается как

$$(*F)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & H_1 & H_2 & H_3 \\ -H_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -H_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -H_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т.е. пара 3-мерных векторов (E, H) превращается в пару $(H, -E)$ если повторить операцию $*$, то получится пара $(-E, -H)$, т.е. знак F изменится, как и следовало ожидать поскольку $\mathrm{sgn}(g)(-1)^{2(4-2)} = -1$.

<u>**Пример 23.**</u> Как упоминалось выше, первая пара уравнений Максвелла (не содержащая источников) может быть записана в виде $dF = 0$, с помощью операции δ мы можем переписать эти уравнения как $\delta * F = 0$. Вторую пару уравнений Максвелла (содержащую токи и заряды) можно записать как $\delta F = -4\pi j$ или как $d * F = -4\pi * j$, где j — 4-мерный вектор плотности тока (временная компонента j — плотность заряда, а пространственные компоненты образуют 3-мерный вектор плотности тока).

<u>**Пример 24.**</u> Действие для точечной частицы — интервал вдоль мировой линии умноженный на $-m$, т.е.

$$S_m = -m \int \sqrt{-\frac{dx^m}{dl}\frac{dx^k}{dl} g_{mk}}\, dl,$$

где интеграл берётся по произвольному монотонному параметру l вдоль мировой линии. Движение частицы задаётся функциями $x^m(l)$. Знак минус под корнем предполагает сигнатуру $(-, +, +, +)$. Метрика g_{mk} входящая в действие может не быть метрикой Минковского, т.е. формула применима и в искривлённом пространстве-времени (или в криволинейных координатах). Мы можем описать движение непрерывного распределения частиц, движущихся по непересекающимся мировым линиям (<пыль>) с помощью другого действия

$$S = -\int \sqrt{|g|}\, d^4X\, \|df^1 \wedge df^2 \wedge df^3\|.$$

Здесь мировые линии пылинок задаются уравнениями $f^\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha = 1, 2, 3$, а плотность пыли в сопутствующей системе координат задаётся как $\|df^1 \wedge df^2 \wedge df^3\|$. 4-мерная плотность тока пыли задаётся как $*(df^1 \wedge df^2 \wedge df^3)$. С помощью последнего действия можно описать и одну частицу, если описать её мировую линию так, как мы описывали ранее поверхность $\mathbf{U}$ с помощью формы u.

19 Дифференциальные формы в присутствии метрики (окончание) (З:)

Пусть A и B — две q-формы, тогда величина

$$(A, B)^{(q)} = \frac{1}{q!} A_{m_1 \ldots m_q} B^{m_1 \ldots m_q}$$

является скаляром, который было бы естественно назвать *скалярным произведением q-форм A и B.*

Существует полезное тождество

$$A \wedge *B = *(A, B)^{(q)} = (A, B)^{(q)}\, \Omega, \tag{45}$$

которое позволяет упростить вид некоторых интегралов

$$\int (A, B)^{(q)}\, \Omega = \int A \wedge *B.$$

Подобная запись будет полезна при рассмотрении действия для электромагнитного поля.

Задача 21: Доказать формулу (45). (Форма $A \wedge *B$ имеет максимальную степень, а значит пропорциональна Ω, чтобы найти коэффициент пропорциональности можно вычислить $*(A \wedge *B)$ и воспользоваться результатом вычисления $\|\Omega\|$ в одной из предыдущих задач).

20 Действие в теоретической механике и в теории поля ()

Мы можем рассматривать различные дифференциальные уравнения в качестве уравнений движения системы, но далеко не всякое уравнение будет физически осмысленно. К счастью мы можем описывать физические системы с помощью *действия* из которого потом можно извлечь стандартными методами физически осмысленные уравнения движения, сохраняющиеся величины и токи, включая энергию и импульс. По этой причине, даже если мы уже знаем уравнения движения, для их исследования бывает полезно найти соответствующее действие.

20.1 Принцип экстремального действия и квантовая механика

В теоретической механике действие представляет собой интеграл по времени от лагранжиана, который является функцией от обобщённых координат и скоростей (производных от координат по времени).

$$S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt. \tag{46}$$

Действие представляет собой функционал от траектории системы в конфигурационном пространстве. Это означает, что действие ставит в соответствие каждой траектории в конфигурационном пространстве (т.е. всякому $x(t)$) некоторое вещественное число $S[x(t)]$. Т.е. функционал — это просто функция на пространстве функций.

Как известно из квантовой механики, амплитуда вероятности той или иной траектории $x(t)$ может быть представлена как $e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$. Чтобы посчитать полную амплитуду вероятности того, что система, находившаяся в момент времени t_0 в точке конфигурационного пространства $x_0 = x(t_0)$ окажется в момент времени t_1 в точке конфигурационного пространства $x_1 = x(t_1)$ надо просуммировать амплитуды вероятности вдоль всех траекторий с граничными условиями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, а поскольку таких траекторий бесконечно много, то пишут не сумму, а <функциональный интеграл>

$$A(x_0, t_0; x_1, t_1) = \int\limits_{x(t_0)=x_0,\, x(t_1)=x_1} e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}\, \mathcal{D}x(t).$$

Функциональный интеграл — это интеграл в пространстве функций, однако со строгим определением функционального интеграла существуют проблемы. К счастью переход к классической теории не требует этого определения.

Для иллюстрации рассмотрим обычный интеграл

$$A = \int\limits_{\mathbf{U}} e^{\frac{i}{\hbar}f(x)}\, d^n x,$$

где $f(x)$ — обычная вещественная функция, характерные значения которой много больше $\hbar$. Такие интегралы вычисляются приближённо по методу перевала: функция $f(x)$ разлагается в ряд по $x - x_0$, где x_0 — стационарная точка $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x_0} = 0$.

В классическом пределе действие $S[x(t)]$ много больше постоянной Планка $\hbar$, и подынтегральное выражение при деформации траектории быстро осциллирует везде, кроме окрестностей стационарных точек в пространстве функций $x(t)$. Поэтому главный вклад в амплитуду вносят как раз эти стационарные траектории — в их окрестностях происходит усиливающая интерференция соседних траекторий, а вне — ослабляющая.

20.2 Действие в механике (О:;У:)

Аналогично обычной производной $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ мы можем определить функциональную производную $\frac{\Delta S}{\Delta x(t)}$.[4]

Обратите внимание, что пространство функций бесконечномерно, поэтому если обычная частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ имела n компонент, нумеруемых разными значениями i, то функциональная производная $\frac{\Delta S}{\Delta x(t)}$ имеет бесконечное число компонент,

[4] Обычно принято писать $\frac{\delta S}{\delta x(t)}$, но буква δ у нас уже занята под операцию $*^{-1}d*$, которая тоже потребуется нам при рассмотрении действия для электромагнитного поля.

нумеруемых разными значениями t. Это наглядно видно на формулах для дифференциалов

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

в конечномерном случае, и

$$\Delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \frac{\Delta S}{\Delta x(t)} \Delta x(t)$$

в бесконечномерном случае. Т.е. $\sum_{i=1}^{n}$ переходит в $\int\limits_{t_0}^{t_1} dt$.

Используемые граничные условия подразумевают, что вариация координат $\Delta x(t)$ обращается в нуль на границах области интегрирования (в точках t_0 и t_1).

Приведём теперь точное определение вариационной производной и вариации действия.

Опр.60: Пусть функционал $S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})\, dt$ — действие, а гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция $\Delta x(t)$ удовлетворяет граничным условиям $\Delta x(t_0) = \Delta x(t_1) = 0$, тогда выражение

$$\Delta S[x(t)] = \left. \frac{dS[x(t) + \varepsilon\, \Delta x(t)]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

называется *вариацией действия.*

На практике можно считать, что $S[x + \Delta x(t)] = S[x(t)] + \Delta S[x(t)] + O((\Delta x(t))^2)$.

Опр.61: Пусть вариация действия записывается в следующем виде

$$\Delta S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{\Delta S}{\Delta x_\alpha(t)}\, \Delta x_\alpha(t),$$

где $\frac{\Delta S}{\Delta x_\alpha(t)}$ — некоторое выражение не зависящее от $\Delta x_\alpha(t)$, тогда выражение $\frac{\Delta S}{\Delta x_\alpha(t)}$ называется *вариационной производной* от S по x. Здесь индекс α нумерует обобщённые координаты. По повторяющемуся индексу α подразумевается суммирование.

Принцип экстремального действия: Если $S[x(t)]$ — действие, то уравнения движения задаются как $\frac{\Delta S}{\Delta x_\alpha(t)} = 0$.

Утверждение 10:

$$\frac{\Delta S}{\Delta x_\alpha(t)} = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha}.$$

Легко видеть, что число уравнений движения, получаемых при вариации действия равно числу компонент у x.

Отметим, что если скорости не входят в лагранжиан, то $\frac{\Delta S}{\Delta x_\alpha(t)} = \frac{\partial L(x)}{\partial x}$, т.е. уравнения движения превращаются из дифференциальных в алгебраические, а это значит, что такое действие не может описывать динамику.

20.3 Гармонический осциллятор

Рассмотрим действие, описывающее гармонический осциллятор под влиянием внешней силы $f(t)$:

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + f(t) x \right) dt.$$

$$\Delta S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \big(m \dot{x}\, \Delta \dot{x} - m \omega^2 x\, \Delta x + f(t)\, \Delta x \big)\, dt.$$

Первый член следует проинтегрировать по частям:

$$\Delta S[x(t)] = m \dot{x}\, \Delta x \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \big(-m \ddot{x} - m \omega^2 x + f(t) \big)\, \Delta x\, dt.$$

Если положить $\Delta x(t_0) = \Delta x(t_1) = 0$, то граничный член обнуляется.

Таким образом,

$$\frac{\Delta S}{\Delta x(t)} = -m \ddot{x} - m \omega^2 x + f(t).$$

Импульс находим как производную от лагранжиана по скорости

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}.$$

Энергия задаётся как

$$E = \dot{x}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - f(t) x.$$

20.4 Действие в теории поля

В теории поля мы имеем дело с системами с бесконечным числом степеней свободы, которые задаются с помощью *полей*. В такой теории лагранжиан задаётся формулой $L = \int d^{n-1}\mathbf{x}\, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ — совокупность пространственных координат (число которых предполагается равным $n-1$), а φ — совокупность полей. В плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ входят значения полей в данной точке в данный момент времени и их производные по пространственным координатам и по времени. Действие для такого лагранжиана приобретает вид

$$S[\varphi(\mathbf{x}, t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbf{V}} d^{n-1}\mathbf{x}\, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{U}} d^n x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x).$$

Здесь $x = (\mathbf{x}, t)$ — совокупность пространственных и временных координат, а $\mathbf{U} = [t_0, t_1] \times \mathbf{V}$ — область пространства-времени по которой идёт интегрирование.

Если действие релятивистки инвариантно, то потребовав, чтобы в действие входили производные по времени не выше первого порядка, мы тем самым требуем, чтобы все производные по координатам, входящие в действие, были не выше первого порядка.

Записав действие через плотность лагранжиана $\mathcal{L}$, мы получаем формулу

$$S[\varphi(x)] = \int\limits_U d^n x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x),$$

которая во многом аналогична формуле (46), при этом можно проследить следующие аналогии:

- время t — совокупность всех пространственных и временных координат x,
- области интегрирования: $[t_0, t_1]$ — $\mathbf{U}$,
- границы областей интегрирования: $\{t_0, t_1\}$ (точки t_0 и t_1 идут с противоположной ориентацией) — граница $\partial\mathbf{U}$,
- лагранжиан L — плотность лагранжиана $\mathcal{L}$,
- обобщённые координаты x_α — поля φ_α,
- скорости $\dot{x}_\alpha$ — производные от полей по координатам $\partial_m\varphi_\alpha$.
- энергия $\dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$ — <тензор>[5] энергии-импульса $\partial_m\varphi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_k\varphi^\alpha} - \delta^k_m L$,
- функциональная производная: $\frac{\Delta S}{\Delta x(t)} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ — $\frac{\Delta S}{\Delta\varphi(t)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_m\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_m\varphi}$,
- внешняя сила $f(t)$ — источник поля $j(x)$,
- член в действии, соответствующий внешнему влиянию: $\int dt\, f_\alpha(t) x^\alpha$ — $\int d^n x\, j_\alpha(x)\varphi^\alpha$.

20.5 Общекоординатные преобразования

Если мы рассматриваем пространственные и временные координаты как координаты на многообразии, то интегрирование по области пространства времени естественно проводить используя форму объёма, т.е.

$$S[\varphi(x)] = \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x) = \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x \sqrt{|g|} L(\varphi, \partial\varphi, x).$$

Поскольку область интегрирования $\mathbf{U}$ произвольна, величина $L(\varphi, \partial\varphi, x) = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x)/\sqrt{|g|}$ должна быть скаляром. Чтобы образовать скаляр L нам, как правило, понадобится использовать метрику (хотя она и не была указана в числе аргументов).

Чем является (т.е. как преобразуется при замене переменных) вариационная производная

$$\frac{\triangle S}{\triangle \varphi^\alpha}$$

[5] Величина определённая таким образом не является тензором относительно общекоординатных преобразований.

зависит от того как преобразуются поля φ^α. Величина

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\triangle S}{\triangle\varphi^\alpha}\,\triangle\varphi^\alpha$$

должна быть скаляром.

Поэтому, если φ^α — скаляр, то

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\triangle S}{\triangle\varphi^\alpha}$$

— тоже скаляр, а если компоненты φ^α при каких-то α представляют собой компоненты дифференциальной формы степени q, то компоненты $\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\triangle S}{\triangle\varphi^\alpha}$ представляют собой соответствующие компоненты поливектора степени q.

Упомянутый выше <тензор> энергии-импульса делённый на $\sqrt{|g|}$

$$T^k{}_m=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\partial_m\varphi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_k\varphi^\alpha}-\delta^k_m L\right)$$

будет настоящим тензором, если все поля φ^α — скаляры.

Как и всякий сохраняющийся ток тензор энергии-импульса определён неоднозначно (вспомним электромагнитное поле).

Заметим, что сохранение энергии-импульса записывается следующим образом

$$\partial_k(\sqrt{|g|}T^k{}_m)=0.$$

Это уравнение не является тензорным (в этом мы ещё убедимся). Дивергенция до сих пор была определена нами лишь для полностью антисимметричных тензоров.

Для определения тензорного закона сохранения энергии-импульса нам понадобится ковариантная производная, но определённый с её помощью <закон сохранения> окажется не вполне настоящим т.к. энергия и импульс могут передаваться от материи пространству-времени.

При изучении общей теории относительности мы встретимся с другим определением тензора энергии-импульса и обсудим проблему энергии-импульса в ОТО подробнее.

20.6 Скалярное поле

Полевым аналогом гармонического осциллятора является массивное скалярное поле, которое описывается действием

$$S[\phi]=\int\limits_{\mathbf{U}} d^n x\,\sqrt{|g|}\,\left(-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2+j(x)\phi\right).$$

Здесь $(\partial\phi)^2=g^{mk}\,\partial_m\phi\,\partial_k\phi$. Знак минус перед первым членом связан с тем, что подразумевается метрика с сигнатурой $(-,+,+,+)$.[6]

[6] Это означает, что метрика Минковского берётся в виде $\mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$, т.е. времениподобные направления задаются векторами с отрицательными квадратами, а пространственноподобные направления — с положительным квадратом. В такой сигнатуре квадрат четырёхмерного импульса связан с массой соотношением $p^2=-m^2$.

Данное действие не зависит от системы координат, поскольку выражение в скобках — скаляр, а $d^n x\,\sqrt{|g|}$ — форма объёма.

$$\Delta S[\phi] = \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x\,\sqrt{|g|}\,\left(-\partial^m\phi\,\partial_m\Delta\phi - m^2\phi\,\Delta\phi + j(x)\,\Delta\phi\right).$$

Первый член следует проинтегрировать по частям. Сначала расписываем его используя правило Лейбница

$$\Delta S[\phi] = -\int\limits_{\mathbf{U}} d^n x\partial_m(\sqrt{|g|}\,\partial^m\phi\,\Delta\phi) + \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x\,\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_m(\sqrt{|g|}\,\partial^m\phi) - m^2\phi + j(x)\right)\Delta\phi.$$

К первому члену применяем теорему Стокса

$$-\int\limits_{\mathbf{U}} d^n x\,\partial_m(\sqrt{|g|}\,\partial^m\phi\,\Delta\phi) = -\int\limits_{\mathbf{U}} \Omega\,\delta(\Delta\phi\,d\phi) = -\int\limits_{\mathbf{U}} *\delta(\Delta\phi\,d\phi) = -\int\limits_{\mathbf{U}} d*(\Delta\phi\,d\phi) = -\int\limits_{\partial\mathbf{U}} \Delta\phi *d\phi.$$

Если положить $\Delta\phi\big|_{\partial\mathbf{U}} = 0$, то граничный член обнуляется.

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\Delta S}{\Delta\phi} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_m\left(\sqrt{|g|}g^{mk}\,\partial_k\phi\right) - m^2\phi + j(x).$$

Поскольку $\Delta S[\phi]$ не зависит от системы координат, функциональная производная $\frac{\Delta S}{\Delta\phi}$ является скаляром. Мы видим, что дифференциальный оператор второго порядка

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_m\sqrt{|g|}g^{mk}\,\partial_k$$

переводит скаляры в скаляры. В Евклидовом пространстве оператор $\Box$ совпадает с лапласианом, а в пространстве Минковского — с оператором Деламбера (волновым оператором). В искривлённом пространстве оператор $\Box$ называется *оператором Бельтрами-Лапласа.*

Полученное нами уравнение поля $(-\Box + m^2)\phi = j(x)$ совпадает с уравнением Клейна-Гордона, которое является релятивистским обобщением уравнения Шредингера. Если пространство-время плоское, источник отсутствует ($j(x) = 0$), а поле ϕ описывает волну де Бройля $\phi = e^{\frac{i}{\hbar}p_m x^m}$, то уравнение поля даёт

$$p_m p^m + \hbar^2 m^2 = 0,$$

что означает (с учётом используемой сигнатурой), что $\hbar m$ — масса кванта скалярного поля.

20.7 Электромагнитное поле

Электромагнитное поле определяется через четырёхмерный потенциал соотношением

$$F_{mk} = \partial_m A_k - \partial_k A_m,$$

а действие записывается как

$$S[A] = \int\limits_{\mathbf{U}} d^4x\,\sqrt{|g|}\left(-\frac{1}{16\pi}F^{mk}F_{mk} - j^m(x)A_m\right).$$

Варьировать это действие следует по A_m. Однако, прежде чем варьировать действие удобно переписать его в геометрических безкоординатных обозначениях.

Мы рассмотрим даже более общий случай, когда потенциал A является q-формой, а пространство-время n-мерно. Итак,

$$F = dA,$$

$$S[A] = -\int\limits_{\mathbf{U}} *\left(\frac{1}{8\pi}\|dA\|^2 + (j,A)^{(q)}\right).$$

(Поскольку выражение в скобках — скаляр, звёздочка означает умножение на $d^n x\,\sqrt{|g|}$). Используя формулу (45) мы можем переписать действие в следующем виде

$$S[A] = -\int\limits_{\mathbf{U}} \frac{1}{8\pi}dA\wedge *dA + A\wedge *j.$$

$$\Delta S[A] = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{-1}{4\pi}d\Delta A\wedge *dA - \Delta A\wedge *j.$$

Множитель $\frac{1}{2}$ в первом слагаемом исчез поскольку оно квадратично и симметрично по A, а значит оба A дают одинаковый вклад.

$$\Delta S[A] = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{-1}{4\pi}\,d(\Delta A\wedge *dA) + \frac{(-1)^q}{4\pi}\,\Delta A\wedge\, d*dA - \Delta A\wedge *j.$$

К первому члену применяем теорему Стокса:

$$\Delta S[A] = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\mathbf{U}} \Delta A\wedge *dA + \int\limits_{\mathbf{U}} \Delta A\wedge *\left(\frac{(-1)^q}{4\pi}\ *^{-1} d*dA - j\right).$$

Первый член обнуляется, если положить $\Delta A\Big|_{\partial\mathbf{U}} = 0$.

$$\Delta S[A] = \int\limits_{\mathbf{U}} *\left(\Delta A, \left(\frac{(-1)^q}{4\pi}\,\delta dA - j\right)\right)^{(q)}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\Delta S}{\Delta A_{m_1\dots m_q}} = \left(\frac{(-1)^q}{4\pi}\,\delta dA - j\right)^{m_1\dots m_q}.$$

Мы получили уравнения Максвелла

$$dF = 0, \qquad \delta F = (-1)^q 4\pi\, j. \tag{47}$$

Из них первое следует из существования потенциала A, такого, что $F = dA$ (реально наоборот — из того, что $dF = 0$, следует существование потенциала), а второе получается при варьировании действия.

Как и для электромагнитного поля, для q-формы A допустимы калибровочные преобразования вида $A \to A + df$, где f — произвольная $(q-1)$-форма. Чтобы фиксировать калибровку нужно наложить C_n^{q-1} условий (по числу компонент формы f). Поскольку $\Box = (-1)^q(\delta d - d\delta)$ наложив на A калибровочное условие $\delta A = 0$ — калибровка Лоренца (это условие имеет как раз C_n^{q-1} компонент, т.к. δA — $(q-1)$-форма), получаем уравнение движения в виде волнового уравнения $\Box A = 4\pi j$.

Заметим, что калибровка Лоренца по-прежнему оставляет некоторый произвол в выборе потенциала A. Так если форма f удовлетворяет условию $\delta df = 0$, то соответствующее калибровочное преобразование не нарушает калибровки Лоренца. Заметим, что мы можем добавлять к f точную форму $f \to f + df_1$, при этом новая форма f будет описывать то же самое калибровочное преобразование. Это даёт нам дополнительный произвол в C_n^{q-2} компонент и мы можем его фиксировать наложив как раз C_n^{q-2} условий $\delta f = 0$. Теперь мы можем накладывать на форму f, описывающую остаточную калибровочную симметрию условие $\Box f = 0$.

Напомним, что уравнения (47) описывают обобщение, из которого обычные уравнения Максвелла получаются при $q = 1$, $n = 4$.

20.8 Релятивистские мембраны (О:;З:;У:)

Помимо полей теория может включать частицы, а также протяжённые объекты.

Действие для частицы массы m, которая движется по закону $x^m = X^m(l)$, где l — произвольный параметр, имеет вид

$$S[X(l)] = -m \int\limits_{l_0}^{l_1} dl \sqrt{-g^{mk}\frac{dX^m}{dl}\frac{dX^m}{dl}}.$$

Таким образом, действие для точечной частицы равно длине мировой линии умноженной на $-m$.

Действие для точечной частицы может быть обобщено на случай релятивисткой $(q-1)$-мерной мембраны или струны (частица — нульмерная мембрана, струна — одномерная мембрана), действие для которых равно площади мировой поверхности (мировая поверхность для частицы — мировая линия, для струны — мировая 2-мерная поверхность) умноженной на $-T$, где T — натяжение мембраны. Мировая поверхность задаётся уравнениями $x^m = X^m(\xi)$, где $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^q)$ — совокупность координат на мировой поверхности мембраны. Координаты ξ нумеруются маленькими буквами из середины греческого алфавита: $\mu, \nu, \dots$.

$$S[X(\xi)] = -T \int\limits_{\mathbf{V}} d^q\xi \sqrt{|\gamma|}.$$

Здесь γ — определитель метрики $\gamma_{\mu\nu}$ индуцированной на поверхности струны:

$$\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}), \qquad \gamma_{\mu\nu} = g_{mn}\frac{\partial X^m}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial X^n}{\partial \xi^\nu}.$$

Функции $X(\xi)$ рассматриваются как поля, заданные на мембране. Чтобы получить уравнения движения следует проварьировать действие по $X(\xi)$. На мембранах могут быть заданы и другие поля.

Варьировать это действие по $X(\xi)$, чтобы получить уравнения движения мы сейчас не будем. Отметим лишь, что если на мембрану не оказывается внешних воздействий, то уравнения движения следуют из сохранения энергии-импульса.

Задача 22*: Вычислить $\frac{\Delta S}{\Delta X^m(\xi)}$.

Тензор энергии-импульса задаётся через вариационную производную от действия полей материи по метрике

$$T^{mk} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\Delta S_{\text{материи}}}{\Delta g_{mk}(x)}.$$

Даже если $S_{\text{материи}}$ задаётся через интеграл по мировой поверхности, при вычислении тензора энергии-импульса его надо переписать как интеграл по мировому объёму введя δ-функционные множители.

Физический смысл этой формулы мы обсудим позднее, когда будем рассматривать общую теорию относительности.

Отличительной особенность релятивистских мембран является то, что мембрана имеет натяжение равное плотности энергии в продольных (по отношению к мембране) направлениях и нулевое натяжение в поперечных направлениях, т.е.

$$T_{mk} = -\rho P_{mk}, \tag{48}$$

где T_{mk} — тензор энергии-импульса, ρ — плотность энергии мембраны, а P_{mk} — ортогональный проектор на мировую поверхность мембраны.

Опр.62: Проектор — это тензор $P^m{}_k$ удовлетворяющий условию

$$P^m{}_k P^k{}_l = P^m{}_l.$$

Если $P^m{}_k$ — проектор, то тензор $\bar{P}^m{}_k = \delta^m_k - P^m{}_k$ также является проектором.

Задача 23: Проверьте.

Опр.63: Проектор $\bar{P}^m{}_k$ мы будем называть *дополнительным* к проектору $P^m{}_k$.

Проектор может действовать на вектор v^k и проецируя его на некоторое подпространство размерности $\dim P = P^m{}_m$ следующим образом

$$(Pv)^m = P^m{}_k v^k.$$

Опр.64: Величина $\dim P = P^m{}_m$ называется *размерностью проектора*, это всегда целое неотрицательное число.

Если проектор диагонализовать, то на диагонали будет стоять $\dim P$ единиц, а все остальные компоненты будут нулями.

Опр.65: Если проекторы $\bar{P}^m{}_k$ и $P^m{}_k$ проецируют векторы на ортогональные подпространства, то они называются *ортогональными проекторами*.

Утверждение 11: Проектор P ортогонален тогда и только тогда, когда $P_{mk} = P_{km}$.

Задача 24: Проверьте Утверждение 11.

Плотность мембраны задаётся как пространственная плотность лагранжиана мембраны со знаком минус

$$\rho = T \int\limits_{\mathbf{V}} d^q\xi \, \sqrt{|\gamma|} \frac{\delta^n(x - X(\xi))}{\sqrt{|g|}}.$$

Здесь $\delta^n(x - X(\xi))$ — n-мерная δ-функция.

Проектор задаётся следующим образом

$$P^{mk} = \gamma^{\mu\kappa} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial X^k}{\partial \xi^\kappa},$$

где $\gamma^{\mu\kappa}$ — обратная метрика на поверхности мембраны: $\gamma^{\mu\kappa}\gamma_{\kappa\lambda} = \delta^\mu_\lambda$.

Задача 25*: Проверить формулу (48).

20.9 Мембранная пыль (З:)

Мы видим, что полное действие в теории поля оказывается суммой интегралов по мировому объёму и мировым поверхностям мембран (в том числе частиц и струн) входящих в теорию. Такое представление действия не слишком удобно, поэтому интересно переписать интегралы по мировым поверхностям через интегралы по мировому объёму, чтобы все поля описывались единообразно (см. например, выше определение тензора энергии-импульса — оно предполагает, что все интегралы берутся по мировому объёму).

Если мировые поверхности мембран не имеют краёв, то они могут быть представлены как поверхности уровня некоторых $n-q$ скалярных функций φ^α, $\alpha = 1, \dots, n-q$. Поэтому можно ожидать, что такой набор из $n-q$ скалярных полей можно использовать для описания q-мерной мембраны, а поскольку таким функциям соответствует целое семейство поверхностей уровня, то такое описание будет давать не одну мембрану, а целое семейство непересекающихся мембран (см. раздел <Дифференциальные формы и поверхности>).

$$S[\varphi(x)] = -\int\limits_{\mathbf{U}} *\|d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^{n-q}\|.$$

Варьируя действие по полям $\varphi^\alpha(x)$ можно получить уравнения движения, которые эквивалентны уравнениям движения для мембраны (см. предыдущий раздел) заданным на всех поверхностях $\varphi = \mathrm{const}$.

Варьируя по метрике можно получить тензор энергии-импульса, который имеет вид (48), при

$$\rho = \|d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^{n-q}\|,$$

$$P_{mk} = g_{mk} - (\mathrm{n}, \mathrm{n})^{(n-q-1)}_{mk},$$

где

$$\mathrm{n} = \frac{d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^{n-q}}{\|d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^{n-q}\|}$$

— единичная нормаль.

Как и раньше $P^m{}_k$ — ортогональный проектор на мировую поверхность мембраны (т.е. теперь на поверхность $\varphi = \mathrm{const}$).

Как и раньше, если поля φ не подвергаются внешнему воздействию, то уравнения движения следуют из сохранения энергии-импульса.

Задача 26*: Вывести тензор энергии-импульса для данного действия.

Задача 27*: Вычислить $\frac{\Delta S}{\Delta \varphi^\alpha(x)}$.

Если $q = 1$, то действие описывает непрерывное распределение частиц, движущихся по непересекающимся мировым линиям. Такую систему можно рассматривать как газ без давления. Газ без давления обычно называют *пылью*. В этом случае $P_{mk} = -u_m u_k$, где u_m — n-мерная скорость частицы пролетающей через данную точку мирового объёма.

При $q > 1$ вместо пылинок мы имеем мембраны, которые друг с другом не взаимодействуют, поэтому такую систему можно назвать *мембранной пылью*.

21 Кривая экстремальной длины

Действие для свободной частицы задаётся как интервал вдоль мировой линии умноженный на массу со знаком <−>

$$S_{\text{ч}} = -m \int\limits_{l_0}^{l_1} dl \sqrt{-g_{mk} \frac{\partial x^m}{\partial l} \frac{\partial x^k}{\partial l}}.$$

Впрочем, называть такую частицу свободной не вполне правильно — она взаимодействует с метрикой, хотя и <минимальным образом>. То есть это действие задаёт движение частицы под действием гравитационного поля в общей теории относительности.

Траектория такой частицы будет *геодезической* или *экстремалью* — аналогом прямой в искривлённом пространстве-времени.

Вариация действия даёт уравнение движения следующего вида

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{pq} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0, \tag{49}$$

где s — интервал вдоль мировой линии, а

$$\Gamma^k_{pq} = \frac{1}{2} g^{kr} (\partial_p g_{qr} + \partial_q g_{pr} - \partial_r g_{pq}).$$

Условие (49) можно трактовать так: вектор скорости $u^k = \frac{dx^k}{ds}$ параллельно переносится вдоль мировой линии. Положив $\frac{d}{ds} = u^q \partial_q$ получаем

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{pq} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = u^q (\partial_q u^k + \Gamma^k_{pq} u^p) = 0.$$

Можно проверить, что выражение в скобках — тензор, поэтому можно обозначить

$$\nabla_q u^k = \partial_q u^k + \Gamma^k_{pq} u^p$$

и назвать ∇_q *ковариантной производной*.

Впрочем, это не единственный способ задания ковариантной производной, хотя именно такая производная понадобится нам в ОТО. Мы видим, что для определения её нужна лишь метрика.

В следующем разделе как раз обсуждаются ковариантные производные вообще.

22 Ковариантная производная

22.1 Определение ковариантной производной

Ранее мы ввели операцию взятия градиента (внешней производной) от скалярных полей и дифференциальных форм, а также производную Ли вдоль произвольного векторного поля. Эти операции не требуют введения на многообразии метрики. Однако, внешняя производная применима только к формам. Производная Ли L_v, хотя и применима к произвольному тензору T, не может полностью нас удовлетворить, поскольку её значение в точке p зависит не только от значения в этой точки векторного поля v, вдоль которого берётся производная, но и от производных от поля v в точке p. Таким образом, хотя производная Ли может считаться обобщением понятия производной по направлению, мы можем попробовать ввести и другое обобщение, которое будет иметь вид

$$\nabla_v T^{m\dots}{}_{k\dots} = v^l\, \nabla_l T^{m\dots}{}_{k\dots},$$

где $\nabla_v T$ — производная от тензора T по направлению, задаваемому вектором v с компонентами v^l, а $\nabla_l T$ — производная по направлению, задаваемому базисным вектором $\frac{\partial}{\partial x^l}$.

Как мы уже отмечали ранее, для того, чтобы дифференцировать по направлению произвольное тензорное поле необходимо уметь вычитать друг из друга тензоры относящиеся к *различным* (хотя и бесконечноблизким) точкам многообразия, т.е. необходимо уметь осуществлять параллельный перенос тензора на бесконечномалый вектор Δx^m.

Если приращение компонент вектора v^m при параллельном переносе на Δx^m линейно по v^m и Δx^m мы можем записать

$$\Delta v^m = -\Gamma^m_{sk} v^s\, \Delta x^k,$$

где Γ^m_{sk} — некоторые коэффициенты, зависящие от точки. Коэффициенты Γ^m_{sk} называются *символами Кристоффеля* или *коэффициентами связности*. Они определяют и ковариантную производную от поля v^m:

$$\nabla_l v^m(x) = \frac{v^m(x+\Delta x) - (v^m(x) + \Delta v^m)}{\Delta x^l} = \partial_l v^m + \Gamma^m_{sl} v^s. \qquad (50)$$

Символы Кристоффеля не образуют тензора, поскольку $\nabla_l v^m$ — тензор, а $\partial_l v^m$ — не тензор, то $\Gamma^m_{sl} v^s$ — не тензор, а раз v^m — тензор, то следовательно Γ^m_{sl} — не тензор. Правила преобразования Γ^m_{sl} при замене координат мы рассмотрим в следующем разделе.

Символы Кристоффеля определяют правила параллельного переноса и ковариантного дифференцирования и для тензоров других типов, если наложить на ковариантную производную ряд естественных условий:

- ковариантная производная линейна,
- ковариантная производная от скаляра — обычная производная,
- ковариантная производная вектора задаётся формулой (50),

- для ковариантной производной справедливо правило Лейбница

$$\nabla_l(T^{m\dots}{}_{k\dots}S^{p\dots}{}_{q\dots}) = (\nabla_l T^{m\dots}{}_{k\dots})S^{p\dots}{}_{q\dots} + T^{m\dots}{}_{k\dots}(\nabla_l S^{p\dots}{}_{q\dots}).$$

Покажем, как вывести из этих условий правило дифференцирования ковекторов. По правилу Лейбница имеем:

$$\nabla_l(v^m u_m) = (\nabla_l v^m)u_m + v^m(\nabla_l u_m) = (\partial_l v^m + \Gamma^m_{sl}v^s)u_m + v^m(\nabla_l u_m).$$

По правилу дифференцирования скаляров имеем

$$\nabla_l(v^m u_m) = \partial_l(v^m u_m) = (\partial_l v^m)u_m + v^m(\partial_l u_m).$$

Таким образом,

$$\Gamma^p_{ml}v^m u_p + v^m(\nabla_l u_m) = v^m(\partial_l u_m).$$

Поскольку мы можем взять любое векторное поле в качестве v^m, на v^m можно сократить, что даёт искомое правило дифференцирования ковекторов

$$\nabla_l u_m = \partial_l u_m - \Gamma^p_{ml}u_p.$$

Теперь используя правило Лейбница для ковариантной производной (и учитывая то, что любой тензор разлагается в сумму членов, являющихся произведением векторов и ковекторов) получаем общее правило дифференцирования тензоров, согласно которому на каждый верхний индекс приходится член с $+\Gamma$, как для вектора, а на каждый нижний — с $-\Gamma$, как для ковектора:

$$\nabla_l T^{mk\dots}{}_{pq\dots} = \partial_l T^{mk\dots}{}_{pq\dots} + \Gamma^m_{sl}T^{sk\dots}{}_{pq\dots} + \Gamma^k_{sl}T^{ms\dots}{}_{pq\dots} + \dots - \Gamma^s_{pl}T^{mk\dots}{}_{sq\dots} - \Gamma^s_{ql}T^{mk\dots}{}_{ps\dots} - \dots. \tag{51}$$

Имея ковариантную производную теперь легко определить параллельный перенос произвольного тензора вдоль некоторой кривой. Тензор постоянен вдоль кривой, если его производная по касательному направлению к кривой равна нулю в каждой точке кривой. При параллельном переносе тензор остаётся постоянен вдоль траектории переноса.

Напомним ещё раз, что в общем случае результат параллельного переноса зависит от кривой (вспомните параллельный перенос на сфере). Если нам повезло и результат параллельного переноса не зависит от траектории, то можно ввести систему координат, в которой всюду $\Gamma^m_{sl} = 0$.

Опр.66: Операция ковариантного дифференцирования (символы Кристоффеля, операция параллельного переноса) задаёт на многообразии структуру, называемую *связностью*.

22.2 Преобразование символов Кристоффеля и тензор кручения

Выведем теперь закон преобразования символов Кристоффеля.

$$
\begin{aligned}
\nabla_{l'} v^{m'} &= \partial_{l'} v^{m'} + \Gamma^{m'}_{s'l'} v^{s'} = \\
&= \nabla_l v^m \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} = \\
&= (\partial_l v^m + \Gamma^m_{sl} v^s) \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} = \\
&= \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \, \partial_{l'} v^m + \Gamma^m_{sl} v^{s'} \, \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} = \\
&= \partial_{l'} \left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \, v^m \right) - v^m \, \partial_{l'} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} + \left(\Gamma^m_{sl} \, \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \right) v^{s'} = \\
&= \partial_{l'} v^{m'} - v^{s'} \, \frac{\partial x^m}{\partial x^{s'}} \, \partial_{l'} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} + \left(\Gamma^m_{sl} \, \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \right) v^{s'}.
\end{aligned}
$$

Сравнивая первую строчку с последней и принимая во внимание, что векторное поле v можно взять произвольное, а значит на $v^{s'}$ можно сократить получаем

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{m'}_{s'l'} &= \Gamma^m_{sl} \, \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} - \frac{\partial x^m}{\partial x^{s'}} \, \partial_{l'} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} = \\
&= \Gamma^m_{sl} \, \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} - \partial_{l'} \left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{s'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \right) + \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \, \partial_{l'} \frac{\partial x^m}{\partial x^{s'}} = \\
&= \Gamma^m_{sl} \, \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} - \partial_{l'} \delta^{m'}_{s'} + \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \, \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{s'} \, \partial x^{l'}}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, символы Кристоффеля преобразуются при замене координат по следующему закону:

$$
\Gamma^{m'}_{s'l'} = \Gamma^m_{sl} \, \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \, \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} + \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \, \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{s'} \, \partial x^{l'}}. \tag{52}
$$

Мы видим, что первый член соответствует тензорному закону преобразования, а второй член симметричен по нижним индексам и не зависит от Γ — он полностью определяется заменой координат.

Поскольку второй член пропорционален второй производной от x по x', коэффициенты Γ ведут себя как компоненты тензора только при линейных преобразованиях.

Второй член в формуле (52) симметричен по нижним индексам, следовательно, антисимметричная по этим индексам часть Γ ведёт себя как тензор.

Опр.67: Тензор с компонентами

$$
T^m{}_{sl} = \Gamma^m_{sl} - \Gamma^m_{ls}
$$

называется *тензором кручения.*

Опр.68: Связность с нулевым тензором кручения называется *симметричной связностью.*

Второй член в формуле (52) не зависит от Γ, а значит,

Опр.69: если мы зададим на многообразии две разных связности с коэффициентами Γ^m_{sl} и $\tilde{\Gamma}^m_{sl}$, то разность этих коэффициентов $\hat{\Gamma}^m_{sl} = \Gamma^m_{sl} - \tilde{\Gamma}^m_{sl}$ (*относительная связность*) будет тензором.

Коэффициентам связностями Γ^m_{sl} и $\tilde{\Gamma}^m_{sl}$ соответствуют ковариантные производные ∇ и $\tilde{\nabla}$, которые связаны друг с другом очевидным соотношением

$$\nabla_l T^{mk\dots}{}_{pq\dots} = \tilde{\nabla}_l T^{mk\dots}{}_{pq\dots} + \hat{\Gamma}^m_{sl} T^{sk\dots}{}_{pq\dots} + \hat{\Gamma}^k_{sl} T^{ms\dots}{}_{pq\dots} + \dots - \hat{\Gamma}^s_{pl} T^{mk\dots}{}_{sq\dots} - \hat{\Gamma}^s_{ql} T^{mk\dots}{}_{ps\dots} - \dots,$$

т.е. ковариантная производная ∇ расписывается через другую ковариантную производную $\tilde{\nabla}$ и относительную связность $\hat{\Gamma}$ точно также как через частную производную ∂ и коэффициенты связности Γ.

23 Геодезические

Аналогом прямых на многообразии являются *геодезические кривые* (или просто *геодезические*). Для геодезических кривых вектор скорости переносится вдоль кривой с помощью параллельного переноса. Это определение подразумевает наличие на геодезической некоторой выделенной параметризации.[7]

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $x^m = \xi^m(\tau)$, где τ — параметр вдоль кривой. Скоростью мы назовём вектор $\frac{d\xi^m}{d\tau}$.

Опр.70: Если вектор $\frac{d\xi^m}{d\tau}$ ковариантно постоянен вдоль кривой, то кривая называется *геодезической* для данной связности.

Запишем ковариантную производную от вектора $\frac{d\xi^m}{d\tau}$ вдоль кривой:

$$\frac{d\xi^k}{d\tau}\nabla_k \frac{d\xi^m}{d\tau} = \frac{d\xi^k}{d\tau}\partial_k \frac{d\xi^m}{d\tau} + \frac{d\xi^k}{d\tau}\Gamma^m_{lk}\frac{d\xi^l}{d\tau} = \frac{d^2\xi^m}{d\tau^2} + \Gamma^m_{lk}\frac{d\xi^l}{d\tau}\frac{d\xi^k}{d\tau}.$$

Мы получили *уравнение геодезической*:

$$\frac{d^2\xi^m}{d\tau^2} + \Gamma^m_{lk}\frac{d\xi^l}{d\tau}\frac{d\xi^k}{d\tau} = 0. \tag{53}$$

Обратите внимание, что в уравнение входит только симметричная (по нижним индексам) часть связности Γ.

Уравнение (53) описывает свободное движение частицы в искривлённом пространстве-времени (в роли времени выступает параметр τ). Имеет смысл сравнить это уравнение со вторым законом Ньютона. Величина $\frac{d^2\xi^m}{d\tau^2}$ аналогична ускорению (хотя и не является вектором!) и мы видим, что <сила> действующая на частицу равна

$$-M\Gamma^m_{lk}\frac{d\xi^l}{d\tau}\frac{d\xi^k}{d\tau},$$

где M — масса частицы. Таким образом, коэффициенты Γ выступают в роли напряжённости некоторого поля, которое заставляет частицу ускоряться (по отношению к выбранной системе отсчёта). Это <поле> одинаково ускоряет все частицы, т.е. ведёт себя подобно силам инерции или гравитационному полю, впрочем, как мы увидим ниже, это всё — одно и то же.

В классическом пределе, т.е. когда система координат <почти декартова>, а скорость $\frac{d\xi^k}{d\tau}$ направлена почти по оси времени, причём $\tau \approx t$ (т.е. $\frac{dt}{d\tau} \approx 1$, где $t = x^0$, а прочие компоненты близки к нулю) уравнение запишется в следующем виде

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{00} = 0, \qquad \alpha \neq 0. \tag{54}$$

[7] Точнее семейства параметризаций, связанных друг с другом соотношением $l = a\tau + b$, где l и τ — естественные параметры, а a и b — константы.

Т.е. $-\Gamma^{\alpha}_{00}$ задаёт <ускорение свободного падения>.

24 Ковариантная производная и метрика

Мы ввели ковариантную производную, параллельный перенос, геодезические, но метрика при этом не использовалась и её существование не предполагалось. Однако, при наличии метрики мы можем потребовать, чтобы ковариантная производная была <согласована с метрикой>. Мы используем метрику для того, чтобы поднимать и опускать тензорные индексы. Потребуем, чтобы операции опускания и поднимания индексов можно было переставлять с операцией ковариантного дифференцирования. Для этого надо, чтобы метрику можно было свободно вносить под знак ковариантной производной и выносить из под него, что означает ковариантное постоянство метрики, т.е. $\nabla_l g_{mk} = 0$.

Опр.71: Если $\nabla_l g_{mk} = 0$, то ковариантная производная и соответствующая связность называются *согласованными с метрикой* или *метрическими*.

Итак, для согласованной с метрикой связности

$$0 = \nabla_l g_{mk} = \partial_l g_{mk} - \Gamma^s_{ml} g_{sk} - \Gamma^s_{kl} g_{ms}. \tag{55}$$

Обозначим

$$\Gamma_{mkl} = \Gamma^s_{kl} g_{ms}.$$

Поскольку Γ — не тензор, мы оговариваем это опускание индекса особо.

Запишем ещё раз условие (55) выписав его трижды, циклически переставляя индексы $m \to k \to l \to m$

$$\begin{aligned} \partial_l g_{mk} &= \Gamma_{kml} + \Gamma_{mkl}, \\ \partial_m g_{kl} &= \Gamma_{lkm} + \Gamma_{klm}, \\ \partial_k g_{lm} &= \Gamma_{mlk} + \Gamma_{lmk}. \end{aligned}$$

Сложим эти три уравнения со знаками <+>, <−>, <+>

$$\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{lm} - \partial_m g_{kl} = 2\Gamma_{m(lk)} + T_{kml} + T_{lmk}.$$

Отсюда можно выразить симметричную часть связности

$$\Gamma_{m(lk)} = \frac{1}{2}(\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{lm} - \partial_m g_{kl}) - \frac{1}{2}(T_{lmk} + T_{kml}).$$

Обратите внимание, что в формулу для симметричной части метрической связности входит не только метрика, но и тензор кручения.

Полная связность задаётся как сумма симметричной и антисимметричной частей, т.е. $\Gamma_{mlk} = \Gamma_{m(lk)} + \frac{1}{2} T_{mlk}$.

$$\Gamma_{mlk} = \frac{1}{2}(\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{lk}) - \frac{1}{2}(T_{lmk} + T_{kml} - T_{mlk}).$$

Нас будет интересовать в первую очередь симметричная метрическая связность:

$$\Gamma^s_{lk} = \frac{1}{2}\, g^{sm}(\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{lk}).$$

25 Тензоры Римана и Риччи (О:;П:;Зам.:;З:;Т:)

Для обычных частных производных вторая производная была симметрична. Для ковариантных производных это не так. Мы можем лишь гарантировать симметричность второй производной от скаляра в случае отсутствия кручения.

Чтобы изучить несимметричность второй производной рассмотрим следующий тензор

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) v^m. \tag{56}$$

Распишем в явном виде вторую производную от v^m используя формулу (51)

$$\nabla_k \nabla_l v^m = (\partial_k \partial_l v^m + \Gamma^m_{ql} \partial_k v^q + \Gamma^m_{qk} \partial_l v^q) - \Gamma^p_{lk} (\partial_p v^m + \Gamma^m_{qp} v^q) + v^q (\partial_k \Gamma^m_{ql} + \Gamma^m_{pk} \Gamma^p_{ql}).$$

Мы сгруппировали члены в этом выражении в три пары скобок. Первая пара скобок симметрична по k и l, а потому не даёт вклада в (56). Выражение во второй паре скобок — ковариантная производная от v^m, а стоящий перед этими скобками символ Γ даст при антисимметризации тензор кручения, т.е. мы получим в выражении (56) член $T^p{}_{kl} \nabla_p v^m$, который является тензором. Таким образом, последняя пара скобок также привнесёт в (56) член, являющийся тензором, который мы обозначим как $R^m{}_{qkl} v^q$. Поскольку векторное поле v^m может быть выбрано произвольным образом, объект $R^m{}_{qkl}$ также является тензором.

Окончательно получаем

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) v^m = R^m{}_{qkl} v^q + T^p{}_{kl} \nabla_p v^m,$$

где

$$R^m{}_{qkl} = \partial_k \Gamma^m_{ql} - \partial_l \Gamma^m_{qk} + \Gamma^m_{pk} \Gamma^p_{ql} - \Gamma^m_{pl} \Gamma^p_{qk}. \tag{57}$$

Опр.72: Тензор (57) называется *тензором Римана* или *тензором кривизны*.

Опр.73: Тензор $R_{ql} = R^k{}_{qkl}$ называется *тензором Риччи*.

Опр.74: *Скалярной кривизной* называется след тензора Риччи: $R = g^{ql} R_{ql}$.

Опр.75: Тензор $G_{ql} = R_{ql} - \frac{1}{2} g_{ql} R$ называется *тензором Эйнштейна*.

Замечание 16: Для того чтобы определить тензоры Римана и Риччи метрика не нужна — нужна только связность.

Замечание 17: Нам предстоит очень плотное знакомство с тензором Риччи, поскольку он входит в уравнения Эйнштейна (уравнения поля для гравитационного поля). При этом тензор Риччи вычисляется по симметричной метрической связности. Уравнения Эйнштейна для свободного гравитационного поля (т.е. для гравитации в отсутствии материи) пишутся так: $R_{ql} = 0$.

Замечание 18: Скалярная кривизна понадобится нам, чтобы определить действие для гравитационного поля, которое задаётся как $\frac{1}{2\kappa^2} \int *R$.

Замечание 19: Тензор Эйнштейна нам тоже понадобится. Уравнения Эйнштейна в присутствии материи пишутся в виде $G_{ql} = \kappa^2 T_{ql}$, где T_{ql} — тензор энергии-импульса материи.

Задача 28*: Вычислить тензор Риччи для произвольной диагональной метрики.

Приведём без доказательства следующие полезные теоремы.

Теор.4.

- $R^m{}_{qkl} = -R^m{}_{qlk}$ всегда,

- $R^m{}_{qkl} + R^m{}_{klq} + R^m{}_{lqk} = 0$ для симметричной связности,
- $R_{mqkl} = -R_{qmkl}$ для связности согласованной с метрикой,
- $R_{mqkl} = R_{klmq}$ для симметричной связности согласованной с метрикой.

Теор.5. Координаты (возможно локальные) в которых коэффициенты связности обращаются в нуль можно ввести тогда и только тогда, когда тензоры Римана и кручения обращаются в нуль. Если связность согласована с метрикой, то в такой системе координат компоненты метрики постоянны.

Пусть связность симметрична и согласована с метрикой. Тогда выполняются все четыре пункта Теоремы 4, три из них можно сформулировать следующим образом: тензор Римана определяется квадратичной формой на дифференциальных 2-формах $R^{ijkl}\omega_{ij}\omega_{kl}$.

Пример 25. В теории упругости мы имеем две естественные пространственные метрики: 1) обычная метрика физического пространства g_{mk}, 2) метрика связанная с упругой средой $\tilde{g}_{mk}$. Их полуразность называется *тензором конечных деформаций* $\varepsilon_{mk} = \frac{1}{2}(g_{mk} - \tilde{g}_{mk})$. Метрика $\tilde{g}_{mk}$ определяется следующим образом: из среды вырезается бесконечномалый кусочек и растягивается так, чтобы тензор натяжения обратился в нуль, расстояния между точками кусочка мерятся именно в таком <разгруженном> состоянии. Не всякую среду можно разгрузить целиком. Невозможность глобальной разгрузки обычно связывают с наличием дефектов. Глобальная разгрузка возможна (т.е. <дефекты отсутствуют>) если тензор Римана, вычисленный по метрике $\tilde{g}_{mk}$, всюду равен нулю.

Заметим, что <отсутствие дефектов> скорее исключение, чем правило. Обычно в среде присутствую внутренние напряжения, которые можно было бы устранить только в искривлённом пространстве, геометрия которого задавалась бы метрикой $\tilde{g}_{mk}$. Если быстро остудить каплю расплавленного металла, то первыми затвердеют наружные слои, а внутренние окажутся сжатыми. Таким образом, объём внутренних областей капли вычисленный с помощью метрики $\tilde{g}_{mk}$ оказывается больше реального физического объёма, вычисляемого со помощью метрики g_{mk}.

26 Тождества Бианки для тензора Римана

Продолжим разбор свойств тензора Римана.

Тождества Бианки выполняются для любой связности, но мы рассмотрим их только для симметрической связности

$$\nabla_q R^m{}_{pkl} + \nabla_k R^m{}_{plq} + \nabla_l R^m{}_{pqk} = 0.$$

(При наличии кручения в тождествах Бианки появляются дополнительные члены.)

Заметим, что поскольку тензор Римана антисимметричен по k и l, тождества Бианки можно записать и так $\nabla_{[q} R^{mp}{}_{kl]}$.

Тождества Бианки легко доказываются в произвольной точке p, если выбрать систему координат, в которой в данной точке p обращаются в нуль коэффициенты связности, т.е. $\Gamma^k_{lm}\big|_p = 0$, $\nabla_m g_{kl}\big|_p = 0$, $R^m{}_{qkl}\big|_p = (\partial_k \Gamma^m_{ql} - \partial_l \Gamma^m_{qk})\big|_p$. В таких координатах в точке p ковариантная производная совпадает с обычной. Чтобы получить тензор Римана мы антисимметризуем выражение $\partial_k \Gamma^m_{ql}$ по k и l. После этого мы берём от тензора

Римана производную ∇_q, которая в данной точке совпадает с ∂_q, и антисимметризуем получившееся выражение по q, k и l, что с учётом симметричности обычной частной производной даёт нуль, и мы получаем тождества Бианки.

Задача 29: Убедитесь, что предыдущий абзац действительно содержит доказательство тождеств Бианки.

Свернув индекс m с индексом k, а индекс p с индексом l получаем из тождеств Бианки следующее тождество

$$\nabla_q R - 2\nabla_k R^k_q = 0,$$

которое легко переписать в следующем виде

$$\nabla_k \left(R^{km} - \frac{1}{2} g^{km} R \right) = 0.$$

Выражение в скобках — тензор Эйнштейна, ковариантная дивергенция которого оказывается равной нулю. Если бы дивергенция была обычная, то с таким тензором можно было бы связать плотность потока некоторого сохраняющегося вектора. Таким образом тензор Эйнштейна описывает некоторые ковариантно-сохраняющиеся величины (сохраняется ли что-либо при этом на самом деле — отдельный интересный вопрос, поскольку ковариантная дивергенция, в отличии от обычной содержит дополнительные члены обусловленные связностью).

Как уже упоминалось на прошлой лекции, уравнения Эйнштейна в присутствии материи имеют вид $G^{km} = \kappa^2 T^{km}$, где $G^{km} = R^{km} - \frac{1}{2} g^{km} R$ — тензор Эйнштейна, $\kappa = \mathrm{const}$, а T^{km} — тензор энергии-импульса. Мы видим, что из уравнений Эйнштейна следует $\nabla_k T^{km} = 0$, т.е. ковариантный закон сохранения энергии-импульса.

27 Действие для гравитационного поля

Действие для гравитационного поля (т.е. для поля метрики g_{mk}) задаётся как интеграл от скалярной кривизны $S_{\text{гр.}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathbf{U}} *R$.[8] Однако, это ещё не полное определение — нам надо ещё определить, по каким полям это действие будет варьироваться. Существует несколько наборов полей, которые могут выбираться для этой цели давая эквивалентные уравнения движения. Мы рассмотрим два из них.

Выберем в качестве исходных полей метрику g_{mk} и коэффициенты связности Γ^k_{ml}. Связность мы будем предполагать симметричной, но не обязательно метрической.

$$S_{\text{гр.1}}[g, \Gamma] = \frac{1}{2\kappa^2} \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x \sqrt{|g|}\, g^{mk} R_{mk}[\Gamma].$$

Чтобы вычислить приращение $\sqrt{|g|}$ при приращении Δg_{mk} удобно записать g в виде

$$g = \frac{1}{n!} \varepsilon^{m_1 \dots m_n} \varepsilon^{k_1 \dots k_n} g_{m_1 k_1} \dots g_{m_n k_n}.$$

[8] Строгое рассмотрение требует учёта граничного члена, который задаётся интегралом по $\partial\mathbf{U}$, но для наших целей (получение уравнений Эйнштейна из вариационного принципа) граничным членом можно пренебречь.

Тогда

$$\Delta g = \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{m_1\dots m_n}\varepsilon^{k_1\dots k_n} g_{m_1k_1}\dots g_{m_{n-1}k_{n-1}}\,\Delta g_{m_nk_n}.$$

Мы видим, что

$$\frac{1}{g(n-1)!}\varepsilon^{m_1\dots m_n}\varepsilon^{k_1\dots k_n} g_{m_1k_1}\dots g_{m_{n-1}k_{n-1}} = g^{m_nk_n}$$

(в этом легко убедиться подставив данное выражение в тождество $g^{kl}g_{lm} = \delta^k_m$).

Таким образом, $\Delta g = g g^{mk}\,\Delta g_{mk}$, откуда следует, что

$$\Delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{mk}\,\Delta g_{mk}.$$

Чтобы вычислить приращение Δg^{pq} рассмотрим сперва следующее приращение: $\Delta(g^{pm}g_{mk})$. С одной стороны $\Delta(g^{pm}g_{mk}) = \Delta\delta^p_k = 0$, одновременно $\Delta(g^{pm}g_{mk}) = g_{mk}\,\Delta g^{pm} + g^{pm}\,\Delta g_{mk}$, откуда следует $g_{mk}\,\Delta g^{pm} = -g^{pm}\,\Delta g_{mk}$. Сворачивая в обе части равенства с g^{qk} получаем

$$\Delta g^{pq} = -g^{pm}g^{qk}\,\Delta g_{mk}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\Delta S_{\text{гр.1}}[g,\Gamma]}{\Delta g_{mk}} = -\frac{1}{2\kappa^2}\,G^{mk},$$

где $G^{mk} = R^{mk} - \frac{1}{2}g^{mk}R$ — тензор Эйнштейна.

Проварьируем теперь действие $S_{\text{гр.1}}$ по коэффициентам связности Γ^k_{ml}.

$$R_{mk} = (\partial_p\Gamma^l_{mq} + \Gamma^l_{ip}\Gamma^i_{mq})(\delta^p_l\delta^q_k - \delta^p_k\delta^q_l).$$

$$\Delta R_{mk} = (\partial_p\,\Delta\Gamma^l_{mq} + \Delta\Gamma^l_{ip}\Gamma^i_{mq} + \Gamma^l_{ip}\,\Delta\Gamma^i_{mq})(\delta^p_l\delta^q_k - \delta^p_k\delta^q_l).$$

$$\Delta R_{mk} = (\delta^l_r\delta^s_m\partial_p - \Gamma^s_{mp}\,\delta^l_r + \Gamma^l_{rp}\,\delta^s_m)\Delta\Gamma^r_{sq}(\delta^p_l\delta^q_k - \delta^p_k\delta^q_l)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\Delta S_{\text{гр.1}}}{\Delta\Gamma^r_{sq}} = \frac{1}{2\kappa^2}(-\delta^l_r\partial_p g^{sk} - \delta^l_r g^{sk}\partial_p\ln[\sqrt{|g|}] - \Gamma^s_{mp}\,\delta^l_r g^{mk} + \Gamma^l_{rp}\,g^{sk})(\delta^p_l\delta^q_k - \delta^p_k\delta^q_l)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\Delta S_{\text{гр.1}}}{\Delta\Gamma^r_{sq}} = \frac{1}{2\kappa^2}g^{sa}g^{qb}(\partial_r g_{ab} - \Gamma_{abr} + g_{ab}[-\partial_r\ln[\sqrt{|g|}] + \Gamma^p_{rp}] + \\ + g_{br}[-\partial^p g_{ap} + \partial_a\ln[\sqrt{|g|}] + g^{mp}\Gamma_{amp}] - \Gamma_{bra})$$

Если $\frac{\Delta S_{\text{гр.1}}}{\Delta\Gamma^r_{sq}} = 0$,[9] то

$$\partial_r g_{ab} - \Gamma_{abr} + g_{ab}[-\partial_r\ln[\sqrt{|g|}] + \Gamma^p_{rp}] + g_{br}[-\partial^p g_{ap} + \partial_a\ln[\sqrt{|g|}] + g^{mp}\Gamma_{amp}] - \Gamma_{bra} = 0$$

Свернув по индексам b и r получаем

$$-\partial^p g_{ap} + \partial_a\ln[\sqrt{|g|}] + g^{mp}\Gamma_{amp} = 0.$$

[9] На самом деле следует требовать, чтобы $\frac{\Delta S_{\text{полное}}}{\Delta\Gamma^r_{sq}} = 0$, а в $S_{\text{полное}}$ помимо гравитации вносят вклад и поля материи. Поэтому, если действие для полей материи содержит коэффициенты связности может оказаться, что $\frac{\Delta S_{\text{гр.1}}}{\Delta\Gamma^r_{sq}} \neq 0$, и связность получит добавку выражающуюся через поля материи.

Подставив это в предыдущее выражение и свернув его по a и b получаем

$$-\partial_r \ln[\sqrt{|g|}] + \Gamma^p_{rp} = 0.$$

Таким образом мы имеем

$$\begin{aligned}
\partial_r g_{ab} - \Gamma_{abr} - \Gamma_{bra} = 0,\\
\partial_a g_{br} - \Gamma_{bra} - \Gamma_{rab} = 0,\\
\partial_b g_{ra} - \Gamma_{rab} - \Gamma_{abr} = 0.
\end{aligned}$$

Вычитая из первого уравнения второе и третье получаем, что уравнения движения для коэффициентов связности дают условие метричности связности $\Gamma^k_{ml} = \frac{1}{2} g^{kp}(\partial_m g_{pl} + \partial_l g_{pm} - \partial_p g_{ml})$.

Другой способ задания действия с самого начала предполагает связность не только симметричной, но и согласованной с метрикой.

$$S_{\text{гр}.2}[g] = \frac{1}{2\kappa^2} \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x \sqrt{|g|}\, g^{mk} R_{mk}[g]$$

Мы можем записать (аналогично тому, что мы имели бы для частных производных)

$$\frac{\Delta S_{\text{гр}.2}[g]}{\Delta g_{mk}(x)} = \frac{\Delta S_{\text{гр}.1}[g,\Gamma]}{\Delta g_{mk}(x)} + \int d^n y \frac{\Delta S_{\text{гр}.1}[g,\Gamma]}{\Delta \Gamma^p_{qr}(y)}\bigg|_{\Gamma=\Gamma[g]} \frac{\Delta \Gamma^p_{qr}(y)}{\Delta g_{mk}(x)}.$$

Поскольку для согласованной с метрикой связности, которая предполагается в действии $S_{\text{гр}.2}$ выполняется условие $\frac{\Delta S_{\text{гр}.1}[g,\Gamma]}{\Delta \Gamma^p_{qr}(y)} = 0$. Поэтому как и для действия $S_{\text{гр}.2}$ получаем

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\Delta S_{\text{гр}.2}[g]}{\Delta g_{mk}} = -\frac{1}{2\kappa^2}\, G^{mk}.$$

28 Тензор энергии-импульса

Полное действие для теории включающей гравитацию и материю имеет вид

$$S_{\text{полное}} = S_{\text{гр.}} + S_{\text{м.}} = \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x \sqrt{|g|}\, \left(\frac{1}{2\kappa^2} R + L_{\text{м.}}\right). \tag{58}$$

Здесь $S_{\text{м.}} = \int\limits_{\mathbf{U}} d^n x \sqrt{|g|}\, L_{\text{м.}}$ — действие для полей материи.[10]

[10] Входящие в действие для полей материи интегралы по мировым линиям и поверхностям мы всегда можем переписать через интегралы по мировому объёму (при этом надо будет использовать δ-функции). Например действие для точечной частицы массы m имеет вид $S_m[X(l)] = -m \int \sqrt{g_{mk} \frac{dX^m(l)}{dl} \frac{dX^k(l)}{dl}} dl$. Его можно переписать через интеграл по объёму если принять

$$L_m(x) = -m \int \sqrt{g_{mk} \frac{dX^m(l)}{dl} \frac{dX^k(l)}{dl}} \frac{\delta^n(X(l) - x)}{\sqrt{|g(x)|}} dl.$$

Конечно, подобное переписывание поверхностных интегралов через объёмные не слишком удобно, как уже отмечалось ранее, когда мы обсуждали способы <борьбы> с такими интегралами.

Если взять в качестве $L_{\text{м.}}$ выражение $L_{\text{э.}-\text{м.}} = -\frac{1}{2}\|F\| = -\frac{1}{4}F_{mk}F_{pq}g^{mp}g^{kq}$, где $F = dA$, то мы получим действие для гравитационного и электромагнитного полей. $L_{\text{э.}-\text{м.}}$ зависит метрики, которая используется чтобы поднимать индексы. Если сравнивать $L_{\text{э.}-\text{м.}}$ с плотностью лагранжиана электромагнитного поля в пространстве Минковского, то единственное различие будет состоять в замене метрики Минковского на метрику g_{mk}.

Опр.76: Если $S_{(0)} = \int d^n x L_{(0)}$ — действие для некоторого набора полей в плоском n-мерном пространстве, то действие $S = \int d^n x \sqrt{|g|}(\frac{1}{2\kappa^2}R + L_{\text{м}})$ называют *действием с минимальным взаимодействием полей с гравитацией* для того же набора полей, если $L_{\text{м.}}$ получается из $L_{(0)}$ простой заменой плоской метрики на метрику искривлённого пространства-времени, а всех производных на ковариантные.

Заметим, что существуют и другие способы построения полевых теорий в искривлённом пространстве, которые в пределе плоского пространстве сводятся к заданным. Вспомним, что в плоском пространстве времени $R_{mqkl} = R_{ql} = R = 0$. Если мы включим в действие член пропорциональный любому из этих объектов, то в пределе плоского пространства этот член обратится в нуль, а в искривлённом пространстве будет описывать некоторое *неминимальное* взаимодействие гравитации и материи.

Пример 26. Мы можем рассмотреть действие вида $S = \int d^n x \sqrt{|g|}(\varphi R + g^{mk}\,\partial_m\varphi\,\partial_k\varphi)$, которое описывает безмассовое скалярное поле φ взаимодействующее с гравитацией неминимальным образом. Причём поле φ задаёт значение гравитационной <постоянной> $G = \frac{1}{16\pi\varphi}$, которая в данной модели может меняться от точки к точке.

В случае (58) вариационная производная от полного действия по метрике получает добавку, связанную с действием для полей материи:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\Delta S_{\text{полное}}}{\Delta g_{mk}} = -\frac{1}{2\kappa^2}G^{mk} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\Delta S_{\text{м.}}}{\Delta g_{mk}}.$$

Назовём тензором энергии-импульса следующее выражение

$$T^{mk} = \frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\Delta S_{\text{м.}}}{\Delta g_{mk}}.$$

Теперь приравняв нулю ковариантную производную от полного действия по метрике мы получаем обычный вид уравнений Эйнштейна в присутствии материи

$$G^{mk} = \kappa^2\,T^{mk}.$$

29 Запись уравнений Эйнштейна через тензор Риччи

Как уже упоминалось ранее, уравнения Эйнштейна имеют вид

$$R^{mk} - \frac{1}{2}g^{mk}R = \kappa^2 T^{mk}. \tag{59}$$

Если взять след уравнения (59), т.е. свернуть его с метрикой g_{mk}, то мы получим

$$-\frac{n-2}{2}R = \kappa^2 T^q{}_q, \tag{60}$$

где n — размерность пространства-времени. Умножая уравнение (60) на $\frac{-g^{mk}}{n-2}$ и складывая с уравнением (59), получаем запись уравнений Эйнштейна через тензор Риччи

$$R^{mk} = \kappa^2 \bar{T}^{mk}, \tag{61}$$

где

$$\bar{T}^{mk} = T^{mk} - \frac{1}{n-2} g^{mk} T^q{}_q. \tag{62}$$

30 Римановы нормальные координаты и принцип эквивалентности

Для любой точки p (псевдо)риманова пространства, т.е. пространства на котором задана метрика (положительноопределённая для риманова пространства, или знаконеопределённая для псевдориманова) можно ввести *римановы нормальные координаты.*

Опр.77: Пусть v — произвольный вектор, заданный в точке p, который имеет компоненты v^m в некоторой вспомогательной системе координат. Для любого вектора v можно построить проходящую через точку p геодезическую, такую, что вектор v будет касательным к этой геодезической в точке p. На этой геодезической отметим точку $f(v)$, расстояние от которой до точки p (измеренное вдоль этой геодезической) равно норме вектора v, т.е. $\sqrt{g_{mk}v^m v^k}\big|_p$. В качестве координат точки $f(v)$ можно принять координаты v^m вектора v во вспомогательной системе координат. Такие координаты называются *римановыми нормальными координатами* в точке p.

Римановы нормальные координаты определены в некоторой окрестности точки p (в окрестности достаточно малой, чтобы геодезические не пересекались).

Римановы нормальные координаты обладают очень полезным свойством (Теорема приводится без доказательства):

Теор.6. В римановых нормальных координатах в точке p обращаются в нуль первые производные от метрики, т.е. $\partial_l g_{mk}\big|_p = 0$.

Утверждение 12: В римановых нормальных координатах в точке p обращаются в нуль коэффициенты симметричной связности согласованной с метрикой, т.е. $\Gamma^k_{lm}\big|_p = g^{ls}\frac{1}{2}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{ml})\big|_p = 0$.

Утверждение 13: В римановых нормальных координатах в точке p ковариантная производная (определённая с помощью симметричной метрической связности) совпадает с обычной частной производной.

Замечание 20: Утверждения Теоремы 6и двух следующих из ней Утверждений относятся только к одной точке — точке p, но точка p — произвольная точка, если мы докажем какое-либо геометрическое утверждение для точки p, то оно будет верно всюду. Под геометрическим утверждениями здесь понимаются утверждения о равенстве тензоров: мы знаем, что если два тензора равны в какой-либо точке в одной системе координат, то они равны в этой точке и в любой другой системе координат.

Пример 27. Ранее мы определяли дифференциальный оператор δ, который действует на полностью антисимметричные тензоры следующим образом $(\delta F)^{m_1 \dots m_q} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_k(\sqrt{|g|}F^{m_1 \dots m_q k})$, причём было доказано, что δF — тензор. В римановой нормальной системе координат в точке p $(\delta F)^{m_1 \dots m_q}\big|_p = \partial_k F^{m_1 \dots m_q n}\big|_p$. Поскольку в римановой нормальной системе координат частная производная совпадает с коваринатной, мы имеем $(\delta F)^{m_1 \dots m_q}\Big|_p = \nabla_k F^{m_1 \dots m_q n}\Big|_p$. Но мы можем построить риманову нормальную систему координат для любой точки, а значит для любой точки $(\delta F)^{m_1 \dots m_q} = \nabla_k F^{m_1 \dots m_q n}$.

Далее подобные рассуждения будут приводиться не столь подробно.

Замечание 21: Поскольку в общем случае $\partial_s \Gamma^k_{ml}\Big|_p \neq 0$, вторые ковариантные производные, в отличии от первых, превращаются в римановых нормальных координатах в точке p в обыкновенные частные производные только если они действуют на скаляр.

Пример 28. Ранее мы убедились, что дифференциальный оператор $\Box = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k \sqrt{|g|} g^{km} \partial_m$, обобщающий волновой оператор на случай искривлённого пространства, переводит скаляры в скаляры. В римановых нормальных координатах $\Box\Big|_p = \partial^k \partial_k\Big|_p$. Отсюда следует, что $\Box = \nabla^k \nabla_k$.

Замечание 22: Оператор $\Box_0$, определённый как $\Box_0 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k \sqrt{|g|} g^{km} \partial_m$ переводит скаляры в скаляры, но если у тензора есть индексы он не будут переводить его в тензор. К счастью оператор $\Box$, определённый как $\Box = \nabla^k \nabla_k$ всегда переводит тензоры в тензоры, но с оператором $\Box_0$ он совпадает только для скаляров.

Пример 29. Тензор Римана определяется через коэффициенты связности как $R^m{}_{qkl} = (\partial_k \Gamma^m_{ql} + \Gamma^m_{pk} \Gamma^p_{ql}) - (k \leftrightarrow l)$. Здесь $(k \leftrightarrow l)$ означает, что во второй паре скобок следует повторить содержимое первой пары поменяв местами индексы k и l. В римановых нормальных координатах в точке p $R^m{}_{qkl}\Big|_p = \partial_k \Gamma^m_{ql} - \partial_l \Gamma^m_{qk}\Big|_p$. Теперь, как упоминалось в предыдущих заметках, легко доказать тождества Бианки.

Подобные $<$трюки$>$ с римановыми нормальными координатами способны очень сильно сокращать выкладки и будут использоваться нами и далее.

Как было установлено ранее, если $x^m = \xi^m(l)$ — некоторая геодезическая, то должно выполняться уравнение геодезической

$$\frac{d^2 \xi^m}{dl^2} + \Gamma^m_{kl} \frac{d\xi^k}{dl} \frac{d\xi^l}{dl} = 0. \tag{63}$$

Мы отмечали, что в данной системе координат коэффициенты $-\Gamma^m_{kl}$ играют роль $<$напряжённости гравитационного поля$>$, вызывая неравенство нулю $<$ускорения$>$[11] $\frac{d^2\xi^m}{dl^2}$. Римановой нормальной системе координат $-\Gamma^m_{kl}\Big|_p = 0$ т.е. гравитационное поле можно уничтожить выбором системы координат в любой точке пространства-времени, чего и требует принцип эквивалентности.

30.1 Пространство с двумя связностями

На одном пространстве $\mathbf{M}$ можно одновременно задать две различные связности с коэффициентами Γ^K_{MN} и $\tilde{\Gamma}^K_{MN}$.

Запишем Γ^K_{MN} в следующем виде

$$\Gamma^K_{MN} = \tilde{\Gamma}^K_{MN} + \hat{\Gamma}^K{}_{MN}. \tag{64}$$

Согласно закону преобразования коэффициентов связности разность коэффициентов связности $\hat{\Gamma}^K{}_{MN}$ является тензором. (Отсюда следует, что и вариация связности является тензором. Приводимый далее материал можно использовать и для вариации действия.) Используя Γ^K_{MN} и $\tilde{\Gamma}^K_{MN}$ мы можем определить ковариантные производные

[11] Слова написанные в кавычках относятся здесь к величинам, которые не являются тензорами.

∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно. Эти ковариантные производные связаны друг с другом следующей формулой, которая аналогична обычной формуле для ковариантной производной с заменой ∂_M на $\tilde{\nabla}_M$, а Γ^K_{NM} на $\hat{\Gamma}^K{}_{NM}$,

$$\nabla_M T^{K\cdots}{}_{L\cdots} = \tilde{\nabla}_M T^{K\cdots}{}_{L\cdots} + \hat{\Gamma}^K_{NM} T^{N\cdots}{}_{L\cdots} + \cdots - \hat{\Gamma}^N_{LM} T^{K\cdots}{}_{N\cdots} - \cdots . \tag{65}$$

Тензор Римана может быть записан как

$$R^I{}_{KLM} = \tilde{R}^I{}_{KLM} + \hat{R}^I{}_{KLM} - \hat{\Gamma}^I{}_{KN} \tilde{T}^N{}_{LM}, \tag{66}$$

где $\tilde{R}^I{}_{KLM}$ — тензор Римана для связности с тильдой. Здесь введены кручение для связности с тильдой

$$\tilde{T}^N{}_{LM} = \tilde{\Gamma}^N{}_{LM} - \tilde{\Gamma}^N{}_{ML} \tag{67}$$

и <относительный тензор Римана>, который вычисляется по обычной формуле для тензора Римана с заменой ∂_M на $\tilde{\nabla}_M$, а Γ^K_{NM} на $\hat{\Gamma}^K{}_{NM}$

$$\hat{R}^I{}_{KLM} = \tilde{\nabla}_L \hat{\Gamma}^I{}_{KM} - \tilde{\nabla}_M \hat{\Gamma}^I{}_{KL} + \hat{\Gamma}^I{}_{NL} \hat{\Gamma}^N{}_{KM} - \hat{\Gamma}^I{}_{NM} \hat{\Gamma}^N{}_{KL}. \tag{68}$$

Свернув уравнение (66) по индексам I и L получаем

$$R_{KM} = \tilde{R}_{KM} + \hat{R}_{KM} - \hat{\Gamma}^L{}_{KN} \tilde{T}^N{}_{LM}, \tag{69}$$

где $\hat{R}_{KM} = \hat{R}^L{}_{KLM}$.

Особый интерес представляет случай, когда обе связности являются симметричеными и метрическими, т.е.

$$\Gamma^K_{MN} = \frac{g^{KL}}{2}(\partial_M g_{LN} + \partial_N g_{LM} - \partial_L g_{MN}), \tag{70}$$

$$\tilde{\Gamma}^K_{MN} = \frac{\tilde{g}^{KL}}{2}(\partial_M \tilde{g}_{LN} + \partial_N \tilde{g}_{LM} - \partial_L \tilde{g}_{MN}). \tag{71}$$

Формула для $\hat{\Gamma}$ получается из формулы для симметричной метрической связности заменой ∂_M на $\tilde{\nabla}_M$

$$\hat{\Gamma}^K_{MN} = \frac{g^{KL}}{2}(\tilde{\nabla}_M g_{LN} + \tilde{\nabla}_N g_{LM} - \tilde{\nabla}_L g_{MN}). \tag{72}$$

Это можно легко увидеть введя римановы нормальные координаты в которых $\tilde{\Gamma}|_p = 0$.

<u>**Задача 30:**</u> Докажите формулу (72) а) с помощью римановых нормальных координат, б*) с помощью прямых выкладок в произвольной системе координат.

На многообразии могут быть заданы одновременно две различные метрики g_{mk} и $\tilde{g}_{mk}$. (Объекты построенные по метрике g_{mk} мы будем обозначать как раньше, а объекты построенные по метрике $\tilde{g}_{mk}$ будут нести тильду.)

Подобное может понадобиться во многих различных задачах, например $\tilde{g}_{mk}$ может быть некоторым точным решением уравнений Эйнштейна, а g_{mk} — его модификацией, например $g_{mk} = \tilde{g}_{mk} + h_{mk}$, где h_{mk} — малая поправка к исходной метрике. Такой случай мы рассмотрим в следующем разделе. Другой вариант — теория упругости, здесь одна метрика может быть метрикой нашего физического пространства, а другая — метрикой пространства, в котором напряжение среду было бы равно нулю. Наконец одна из метрик может быть просто вспомогательной, введённой для удобства расчётов.

В формула для тензора Римана (66) для симметричных связностей исчезает член с кручением, а если эта связность согласована с метрикой, то используя римановы нормальные координаты можно доказать формулу (66) даже устно. В римановых нормальных координатах для $\tilde{g}_{mk}$ тензор $R^m{}_{qkl}$ легко представить в виде суммы (66), поскольку квадратичные члены останутся только в $\hat{R}$.

Задача 31: Докажите формулу (66) а) с помощью римановых нормальных координат (для симметричной метрической связности), б*) с помощью прямых выкладок (в произвольной системе координат, для произвольной связности).

Хотя для тензоров Риччи можно ввести R_{ql}, $\tilde{R}_{ql}$ и $\hat{R}_{ql} = R_{ql} - \tilde{R}_{ql}$, однако для скалярной кривизны это уже не удаётся, поскольку для её определения надо использовать метрику, разную для R и $\tilde{R}$. По этой причине при наличии двух метрик часто бывает удобнее работать с уравнениями Эйнштейна в форме (61).

31 Линеаризованные уравнения Эйнштейна

31.1 Уравнения без фиксации калибровки

Пусть

$$g_{mk} = \tilde{g}_{mk} + h_{mk},$$

где величины h_{mk} представляют собой малую поправку к *фоновой метрике* $\tilde{g}_{mk}$. В этом разделе мы будем вычислять все величины в линейном порядке по h, при этом все индексы будут подниматься и опускаться с помощью метрики $\tilde{g}_{mk}$. Таким образом, в линейном порядке

$$g^{mk} \approx \tilde{g}^{mk} - h^{mk},$$

$$\hat{\Gamma}^k_{lm} \approx \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_m h^k_l + \tilde{\nabla}_l h^k_m - \tilde{\nabla}^k h_{ml}).$$

В последней формуле мы воспользовались тем, что $\tilde{\nabla}_k \tilde{g}_{ml} = 0$.

В формуле для $\hat{R}_{ql}$ мы можем выбросить квадратичные по $\hat{\Gamma}$ члены, поскольку они будут квадратичны по h.

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ql} &\approx \tilde{\nabla}_k \hat{\Gamma}^k_{ql} - \tilde{\nabla}_l \hat{\Gamma}^k_{qk} \approx \frac{1}{2}[\tilde{\nabla}_k(\tilde{\nabla}_q h^k_l + \tilde{\nabla}_l h^k_q - \tilde{\nabla}^k h_{ql}) - \tilde{\nabla}_l(\tilde{\nabla}_q h^k_k + \tilde{\nabla}_k h^k_q - \tilde{\nabla}^k h_{qk})] = \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{\nabla}_k(\tilde{\nabla}_q h^k_l + \tilde{\nabla}_l h^k_q - \tilde{\nabla}^k h_{ql}) - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_q h^r_r].\end{aligned}$$

Обозначим

$$\psi^k_l = h^k_l - \frac{1}{2}\delta^k_l h^r_r.$$

Теперь мы можем записать (мы используем то, что h^r_r — скаляр, а значит $\tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_q h^r_r = \tilde{\nabla}_q \tilde{\nabla}_l h^r_r$)

$$\hat{R}_{ql} \approx \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_k(\tilde{\nabla}_q \psi^k_l + \tilde{\nabla}_l \psi^k_q - \tilde{\nabla}^k h_{ql}) \approx \tilde{\nabla}^k \tilde{\nabla}_{(q}\psi_{l)k} - \frac{1}{2}\Box h_{ql}. \tag{73}$$

Здесь $\Box = \tilde{\nabla}^k \tilde{\nabla}_k$. Последнее выражение можно переписать как

$$\hat{R}_{ql} \approx \tilde{\nabla}_{(q}\tilde{\nabla}^k \psi_{l)k} - \frac{1}{2}\Box h_{ql} + \tilde{R}_{s(q}\psi^s_{l)} - \tilde{R}_{slqk}\psi^{sk}. \tag{74}$$

Задача 32*: Получить формулу (74) из формулы (73).

На первый взгляд переписав формулу в таком виде мы только проиграли

Однако, вспомним, что метрика не полностью определяется геометрией пространства-времени — она содержит произвол в выборе координат. Мы можем выбрать произвольным образом набор из n координат, а значит, чтобы фиксировать этот произвол мы можем наложить n калибровочных условий. Наложим на уравнение (74) калибровку Лоренца

$$\tilde{\nabla}_k \psi^{kl} = 0. \tag{75}$$

Теперь уравнения (74) упростились:

$$\hat{R}_{ql} \approx -\frac{1}{2}\Box h_{ql} + \tilde{R}_{s(q}\psi^{s}_{l)} - \tilde{R}_{slqk}\psi^{sk}. \tag{76}$$

Если мы предположим, что фоновая метрика является решением вакуумных уравнений Эйнштейна, т.е. $\tilde{R}_{sq} = 0$, то из уравнения исчезнет ещё один член

$$\hat{R}_{ql} \approx -\frac{1}{2}\Box h_{ql} - \tilde{R}_{slqk}\psi^{sk}. \tag{77}$$

В случае если фоновая метрика соответствует плоскому пространству в уравнении остаётся один член

$$\hat{R}_{ql} \approx -\frac{1}{2}\Box h_{ql}. \tag{78}$$

Мы видим, что для линеаризованных уравнений Эйнштейна переход от плоской фонового пространства к искривлённому сопровождается появлением членов пропорциональных фоновому тензору Римана, т.е. тензорное поле h_{mk} взаимодействует с фоновой метрикой *неминимальным образом*.

31.2 Калибровочные преобразования

Рассмотрим в линейном приближении бесконечномалое преобразование координат[12]

$$x'^m = x^m + \xi^m(x).$$

Таким образом бесконечномалое преобразование координат задаётся одним векторным полем ξ. Будем считать, что порядок малости ξ такой же как у h. Обратное преобразование задаётся как

$$x^m = x'^m - \xi^m(x').$$

Мы не делаем различия между $\xi^m(x)$ и $\xi^m(x')$, поскольку они различаются на бесконечномалую второго порядка малости по h. В дальнейшем аргументы будут просто опускаться.

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = \delta^k_m - \partial_m \xi^k$$

В линейном порядке метрика преобразуется следующим образом

$$g'_{sp}(x') = g_{km}(x)\frac{\partial x^k}{\partial x'^s}\frac{\partial x^m}{\partial x'^p} \approx (g_{km}(x') - \xi^r \partial_r g_{km}(x'))(\delta^k_s + \partial_s \xi^k)(\delta^k_p + \partial_p \xi^m) \approx g_{sp} - (\nabla_s \xi_p + \nabla_p \xi_s).$$

[12] Обычно при переходе от одних координат к другим мы ставили штрих над индексами в новой системе координат. Здесь нам будет удобнее ставить штрих над буквой обозначающей объект, а не над индексами.

Мы видим, что изменение g_{mk} при таком преобразовании координат линейно по ξ. Разбиение метрики g_{mk} на $\tilde{g}_{mk}$ и h_{mk} произвольно, поэтому мы можем положить, что $\tilde{g}_{mk}$ не меняется, а всё преобразование происходит за счёт h_{mk}. Поэтому

$$h'_{sp} = h_{sp} - (\nabla_s \xi_p + \nabla_p \xi_s).$$

32 Симметрии пространства-времени

Как мы уже обсуждали на одной из первых лекций, векторное поле ξ^m задаёт на многообразии однопараметрическое семейство преобразований координат, при котором все точки многообразия сдвигаются по правилу $\frac{\partial X^m(x,l)}{\partial l} = \xi^m(X(x,l))$. При этом X — старые координаты, x — новые, а l — параметр, нумерующий преобразования. Производная Ли от метрики g_{mk} имеет вид

$$L_\xi g_{mk} = \nabla_m \xi_k + \nabla_k \xi_m, \tag{79}$$

что с точностью до знака совпадает с изменением метрики при бесконечномалом преобразовании.

Если $L_\xi g_{mk} = 0$, то это означает, что векторное поле ξ задаёт однопараметрическое семейство преобразований сохраняющих расстояния на многообразии. Можно сказать, что многообразие может скользить само по себе без растяжений вдоль векторного поля ξ.

Опр.78: Векторное поле ξ, для которого $L_\xi g_{mk} = 0$ называется *вектором Киллинга.*

Опр.79: Определяющее вектор Киллинга уравнение

$$\nabla_m \xi_k + \nabla_k \xi_m = 0 \tag{80}$$

называется *уравнением Киллинга.*

Очевидно, что векторы Киллинга существуют не для всякого пространства, поскольку существование вектора Киллинга предполагает, что пространство симметрично относительно какого-то непрерывного семейства преобразований.

Теор.7. Векторы Киллинга для данного многообразия образуют алгебру Ли относительно коммутатора векторных полей, т.е. если ξ и η — векторы Киллинга, то $\alpha\xi + \beta\eta$ и $[\xi, \eta]$ тоже векторы Киллинга (α и β — произвольные действительные числа).

Задача 33: Доказать Теорему 7.

Утверждения о симметриях пространства-времени формулируются независимым от координат образом как утверждения о существовании векторов Киллинга и соотношениях между ними.

Если частица движется по геодезической $X^m(l)$ в пространстве, в котором существует вектор Киллинга ξ, то $\xi_m \frac{dX^m}{dl} = \mathrm{const}$, т.е. для свободно движущейся частицы сохраняется проекция импульса на вектор Киллинга.

Задача 34*: Пользуясь уравнением геодезической $\frac{d^2X^m}{dl^2} + \Gamma^m_{sp} \frac{dX^s}{dl} \frac{dX^p}{dl} = 0$ и уравнением Киллинга (80) доказать предыдущее утверждение.

33 Релятивистские мембраны

Релятивисткие мембраны уже рассматривались нами выше.

Действие для $(q-1)$-мерной мембраны задаётся следующим образом:

$$S[X(\xi)] = -T \int\limits_{\mathbf{V}} d^q\xi \sqrt{|\gamma|}. \tag{81}$$

$$\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}), \qquad \gamma_{\mu\nu} = g_{mn} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial X^n}{\partial \xi^\nu}.$$

ξ^μ — координаты на поверхности мембраны. Поля $X^m(\xi)$ задают отображение мировой поверхности мембраны $\mathbf{V}$ на пространство-время $\mathbf{M}$, т.е. $X : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$. $\mathbf{V}$ может быть *многообразием с краем*.

Опр.80: Замкнутая область выделяемая на многообразии неравенством $f(x) \leq 0$, где $f(x)$ — гладкая функция, называется *многообразием с краем*, если градиент функции $f(x)$ не обращается в нуль при $f(x) = 0$.

Таким образом, $(q-1)$-мерная мембрана заметает в n-мерном пространстве-времени q-мерную мировую поверхность $X(\mathbf{V})$, которая описывается с помощью n полей $X^m(\xi)$, которые являются функциями q переменных ξ^μ. Очевидно, что на мировой поверхности можно вводить различные координаты, а значит наше описание содержит q произвольных функций (координат) на $\mathbf{V}$, поэтому n уравнений движения, получаемых при варьировании по полям $X^m(\xi)$, не будут независимыми — между ними будет q связей.

Чтобы избавиться от этого произвола (зафиксировать калибровку) можно ввести q калибровочных условий. Например можно выбрать в качестве координат на мировой поверхности $\xi^0, \ldots, \xi^{q-1}$ пространственно-временные координаты $x^0, \ldots, x^{q-1}$, т.е выбрать в качестве калибровочных условий $X^\mu(\xi) = \xi^\mu$, $\mu = 0, \ldots, q-1$.

Для свободной (ни с чем не взаимодействующей) релятивисткой мембраны уравнения движения следуют из ковариантного закона сохранения энергии-импульса $\nabla_m T^{mk} = 0$. Тензор энергии-импульса для мембраны уже рассматривался нами ранее.

Проварьируем теперь действие по полям $X^m(\xi)$[13]

$$\begin{aligned} \Delta_X S &= -T \int\limits_{\mathbf{V}} d^q\xi\, \Delta_X \sqrt{|\gamma|} = -T \int\limits_{\mathbf{V}} d^q\xi\, \frac{1}{2}\sqrt{|\gamma|}\gamma^{\mu\nu}\, \Delta_X \gamma_{\mu\nu} = \\ &= -T \int\limits_{\mathbf{V}} d^q\xi\, \sqrt{|\gamma|}\gamma^{\mu\nu}(g_{mk}\, \partial_\mu X^m\, \partial_\nu \Delta X^k + \frac{1}{2}\partial_\mu X^m\, \partial_\nu X^k\, \partial_l g_{mk}\, \Delta X^l). \end{aligned}$$

Здесь $\gamma^{\mu\nu}$ — обратная метрика на мировой поверхности мембраны, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}$.

$$\Delta_X S = -T \int\limits_{\partial\mathbf{V}} *_{\mathbf{V}} \left(\gamma^{\mu\nu} g_{mk}\, \partial_\mu X^m\right) \Delta X^k + T \int\limits_{\mathbf{V}} d^q\xi \left[\partial_\nu \left(\sqrt{|\gamma|}\gamma^{\mu\nu} g_{mk}\, \partial_\mu X^m\right) - \frac{1}{2}\sqrt{|\gamma|} P^{ps}\, \partial_k g_{ps}\right] \Delta X^k. \tag{82}$$

где

$$P^{ps} = \gamma^{\mu\nu}\, \partial_\mu X^p\, \partial_\nu X^s.$$

Символ $*_{\mathbf{V}}$ обозначает ходжевскую дуальность на многообразии $\mathbf{V}$.

[13] Вспомним, что $\Delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|} g^{mk}\, \Delta g_{mk}$.

Задача 35: Проверить, что $P^p{}_s P^s{}_r = P^p{}_r$, т.е. $P^p{}_s$ — проектор. Проверить, что $P^p{}_s\,\partial_i X^s = \partial_i X^p$, т.е. этот проектор переводит векторы касательные к мировой поверхности мембраны в себя. Проверить, что $\dim P = P^p{}_p = q$. Т.е. P — ортогональный проектор на мировую поверхность мембраны (ортогональность следует из $P_{mk} = P_{km}$, проверьте).

Второй член в (82) задаёт уравнения движения. Поскольку, в отличии от пространства-времени, многообразие $\mathbf{V}$ может иметь край (случай *открытой мембраны*) в формуле (82) нельзя отбрасывать граничный член, который задаёт теперь граничные условия.

Вариационная производная имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\frac{\Delta S}{\Delta X^k(\xi)} = \frac{T}{\sqrt{|\gamma|}}\partial_\nu\left(\sqrt{|\gamma|}\gamma^{\mu\nu}g_{mk}\,\partial_\mu X^m\right) - \frac{T}{2}P^{pq}\,\partial_k g_{pq}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\frac{\Delta S}{\Delta X^k(\xi)} = T\left\{g_{km}\,\Box_{\mathbf{V}}X^m + \Gamma_{kpq}P^{pq}\right\}. \tag{83}$$

Здесь $\Box_{\mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\partial_\mu\sqrt{|\gamma|}\gamma^{\mu\nu}\partial_\nu$.

Задача 36: Проверить, что две последние формулы эквивалентны.

Легко проверить, что

$$\frac{\Delta S}{\Delta X^k}\,\partial_\kappa X^k = 0$$

для любых полей $X^m(\xi)$. Это и есть q обещанных связей между уравнениями движения.

Задача 37: Проверить, что связи выполняются тождественно для любых полей X (в том числе и для полей не удовлетворяющих уравнениям движения).

Обе части уравнения (83) умножены на $|\gamma|^{-1/2}$, чтобы выражение стало скаляром относительно преобразования координат на $\mathbf{V}$. Относительно преобразований координат на $\mathbf{M}$ (83) является ковектором.

Замечание 23: В теории мембран нам приходится иметь дело с двумя многообразиями одновременно: $\mathbf{V}$ и $\mathbf{M}$. Величины, с которыми мы работаем могут нести как поверхностные индексы $\mu, \nu, \dots$, нумерующие координаты на $\mathbf{V}$, так и пространственно-временные индексы $m, k, \dots$, нумерующие координаты на $\mathbf{M}$. При преобразовании координат на одном из многообразий закон преобразования объекта определяется только соответствующими индексами. Так, например, тензоры T^α_m и A_m будет вектором и скаляром соответственно относительно преобразований координат на многообразии $\mathbf{V}$, тогда как относительно преобразований координат на $\mathbf{M}$ оба они будут ковекторами.

Уравнение получаемое приравниванием нулю вариационной производной (83), очевидно, является обобщением волнового уравнения. Если взять в качестве пространственно-временной метрики метрику Минковского $g_{mk} = \eta_{mk}$, то уравнение движения по форме оказывается просто волновым уравнением в искривлённом пространстве $\mathbf{V}$. Однако, метрика $\gamma_{\mu\nu}$ пространства $\mathbf{V}$ определяется функциями $X^m(\xi)$, т.е. уравнения движения оказываются нелинейными.

34 Релятивистские струны

В случае $q = 2$, т.е. одномерной мембраны — струны, теория приобретает особую специфику. На двумерной поверхности всегда можно ввести конформно-плоские ко-

ординаты, в которых
$$\gamma_{\mu\nu} = \lambda(\xi)\eta_{\mu\nu}, \tag{84}$$
где $\eta_{\mu\nu}$ — двумерная метрика Минковского. Условия (84) — калибровочные условия (их как раз два). Они могут быть переписаны как

$$g_{mk}\,\partial_\tau X^m\,\partial_\sigma X^k = 0, \qquad g_{mk}(\partial_\tau X^m\,\partial_\tau X^k + \partial_\sigma X^m\,\partial_\sigma X^k) = 0.$$

Здесь τ и σ — времениподобная пространственноподобная координаты на $\mathbf{V}$, $\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma$.

В такой калибровке $\sqrt{|\gamma|} = \lambda$ и мы можем записать

$$\frac{\Delta S}{\Delta X^k(\xi)} = g_{mk}\partial_\nu\left(\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu X^m\right) - \lambda(\xi)\Gamma_{kpq}P^{pq}, \tag{85}$$

где $\eta^{\mu\nu}$ — обратная двумерная метрика Минковского. Если g_{mk} не зависит от координат (в плоском пространстве-времени) уравнение (85) оказывается обычным двумерным волновым уравнением.

35 Делокализованные мембраны

Уже рассматривались нами ранее.

Рассмотрим следующую модификацию мембранного действия (81)

$$S[X(\xi,\phi)] = -\int\limits_{\mathbf{U}} d^{n-q}\phi \int\limits_{\mathbf{V}} d^q\xi\,\sqrt{|\gamma|}. \tag{86}$$

При вычислении $\gamma_{\mu\nu}$ по прежнему используется дифференцирование только по ξ. Пусть $\partial\mathbf{V} = 0$. Очевидно, что $X(\xi,\phi)$ при $\phi = \mathrm{const}$ задаёт бесконечно лёгкую мембрану с теми же уравнениями движения, что и раньше (при вариации действия ϕ никак не сказывается). Отсюда следует, что уравнения движения по прежнему удовлетворяют q связям. Таким образом, новое действие описывает непрерывное семейство мембран параметризуемых параметром ϕ. Можно сказать, что мембрана приобрела толщину, теперь координаты ξ — вдоль мембраны, а ϕ — поперёк, причём слои с разными значениями ϕ друг с другом не взаимодействуют.

Если $\frac{DX}{D(\xi,\phi)} \neq 0$, то координаты (ξ,ϕ) можно рассматривать не только как координаты на <толстой мембране>, но и как координаты в некоторой области пространства-времени. Это позволяет нам решить систему $X(\xi,\phi) = x$ относительно ξ и ϕ. Мы получаем $\xi = \xi(x)$, $\phi = \varphi(x)$. Перейдя в действии (86) от интегрирования по ϕ и ξ к интегрированию по x мы получаем

$$S[\varphi(x)] = -\int\limits_{\mathbf{U}} d^n x\sqrt{|g|}\,\|d\varphi^1\wedge\cdots\wedge\, d\varphi^{n-q}\|.$$

Теперь x — координаты, а $\xi(x)$ и $\varphi(x)$ — поля.

Задача 38*: Вывести действие (35) из (86).

Интересно, что в новое действие не вошло q полей $\xi^\mu(x)$, а значит мы избавились от связей, и уравнения движения стали независимыми.

Поверхности $\varphi = \mathrm{const}$ соответствуют мировым поверхностям мембран. Форму n естественно назвать *единичной нормалью*

$$\mathrm{n} = \frac{d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^{n-q}}{\|d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^{n-q}\|}.$$

Для свободной (ни с чем не взаимодействующей) делокализованной мембраны уравнения движения следуют из ковариантного закона сохранения энергии-импульса $\nabla_m T^{mk} = 0$. Тензор энергии-импульса для делокализованной мембраны (мембранной пыли) уже рассматривался нами.

Для нумерации координат ξ мы использовали маленькие буквы из середины греческого алфавита $\mu, \nu, \dots$. Для нумерации полей φ мы будем использовать буквы из начала греческого алфавита $\alpha, \beta, \dots$.

В простейшем случае $q = n - 1$ имеется только одно поле φ с действием

$$S = -\int d^n x \sqrt{|g|}\, \sqrt{g^{mk}\, \partial_m \varphi\, \partial_k \varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\Delta S}{\Delta \varphi} = \nabla_k \frac{g^{km} \partial_m \varphi}{\sqrt{g^{ps}\, \partial_p \varphi\, \partial_s \varphi}} = \nabla_k \mathrm{n}^k.$$

Задача 39: Вывести последнюю формулу.

В общем случае вариационная производная имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\Delta S}{\Delta \varphi^\alpha} = \partial_{m_1} \varphi^1 \dots \widehat{\partial_{m_\alpha} \varphi^\alpha} \dots \partial_{m_{n-q}} \varphi^{n-q} \nabla_{m_\alpha} \mathrm{n}^{m_1 \dots m_{n-q}}.$$

Член под шляпкой опускается.

Задача 40*: Вывести последнюю формулу.