Конспект по теоретической механике.

К. Ю. Платонов
СПбПУ

Санкт-Петербург
2005

Содержание

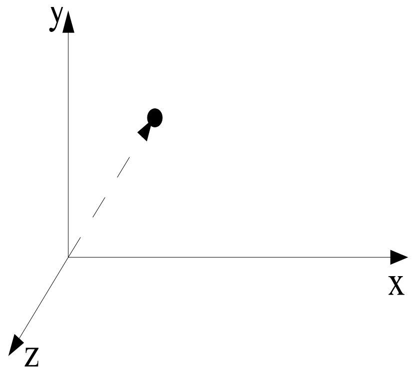
Глава 1. Кинематика и основы динамики материальной точки.

В этой главе мы рассматриваем только те задачи, в которых размерами тел можно пренебречь.

§1. Обобщенные координаты.

Для описания движения тела требуется задать систему координат и начало отсчета.

Радиус-вектор $\vec{r}$ однозначно определяет положение точки в пространстве в заданный момент времени. В свою очередь, он однозначно описывается набором координат (в трехмерном пространстве их три): $\vec{r} \Leftrightarrow \{q_1, q_2, q_3\} \Leftrightarrow \{x, y, z\}$

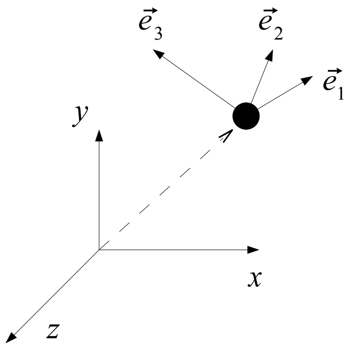


Далеко не всегда удобно пользоваться декартовой системой координат. Иногда проще решать задачу, перейдя к новым координатам. Координаты, в которых решается данная задача (не обязательно декартовы) принято называть обобщенными координатами. Очевидно, основное требование к обобщенным координатам заключается в том, чтобы они без потерь преобразовывались друг в друга: $\frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0$.

Определение. Координатные поверхности и линии

Координатная поверхность – это поверхность, задаваемая уравнением $q_i = C$.

Координатная линия – это линия пересечения двух координатных поверхностей.



В случае произвольной системы координат координатные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (т. к. их выбирают единичной длины, в дальнейшем будем называть их ортами) могут зависеть от точки пространства. Мы будем рассматривать только те системы, в которых координатные векторы ортогональны друг другу.

Обычно система координат $\{q_1, q_2, q_3\}$ носит название одной из своих координатных поверхностей.

На практике удобно пользоваться той координатной системой, которая обладает тем же родом симметрии, что и силы или потенциалы, рассматриваемые в данной задаче.

Радиус-вектор материальной точки определяется тремя координатами:

$$\vec{r} = \{(\vec{r})_1, (\vec{r})_2 (\vec{r})_3\} = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \to \{(\vec{V})_1, (\vec{V})_2, (\vec{V})_3\}$$

Определение. Коэффициенты Ламэ.

Коэффициенты Ламэ $\{H_a\}, a = 1..s$, где s – число измерений – это коэффициенты перехода от одних координат к другим:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a} = \vec{e}_a(q_1, q_2, q_3) \cdot H_a(q_1, q_2, q_3) = \vec{e}_a(\vec{r}) \cdot H_a(\vec{r})$$

$$d\vec{r} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a} \cdot d q_a = \sum_{a=1}^{3} H_a \cdot d q_a \cdot \vec{e}_a ,$$

Соответственно, $(d\vec{r})_a = H_a \cdot d q_a$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = H_1 \cdot \dot{q}_1 \cdot \vec{e}_1 + H_2 \cdot \dot{q}_2 \cdot \vec{e}_2 + H_3 \cdot \dot{q}_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{r}=\sum_{a=1}^{3}(\vec{r})_a\cdot\vec{e}_a$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(H_1\cdot\dot{q}_1\ \vec{e}_1)$$

$$\frac{dH_1}{dt}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial H_1}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\frac{d\dot{q}_1}{dt}=\ddot{q}_1$$

$$\frac{d\vec{e}_a}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H_a}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_a}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_a}=\frac{\partial}{\partial q_a}\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial q_a}\qquad\left(\frac{d}{dt}\,и\,\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\text{ можно менять местами, т. к. }\frac{d}{dt}=\sum_k\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\right)$$

Сложнее всего дифференцировать орты:

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q_a}=\frac{\partial}{\partial q_a}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_a}\cdot\frac{1}{H_i}\right)$$

$$(\vec{e}_a)^2\equiv1$$

$$2\ \vec{e}_a\frac{d\vec{e}_a}{dt}=0\ \Rightarrow\frac{d\vec{e}_a}{dt}\perp\vec{e}_a$$

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{d\vec{e}_1}{dt}=a_2\cdot\vec{e}_2+a_3\cdot\vec{e}_3\\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\equiv0\\ \vec{e}_2\dfrac{d\vec{e}_1}{dt}+\vec{e}_1\dfrac{d\vec{e}_2}{dt}=0\end{array}\right\}\Rightarrow a_2=\vec{e}_2\frac{d\vec{e}_1}{dt}=-\vec{e}_1\frac{\vec{e}_2}{dt}$$

$$(*)\Rightarrow\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_a}\right)^2=H_a\,.$$

Представим это в декартовых координатах.

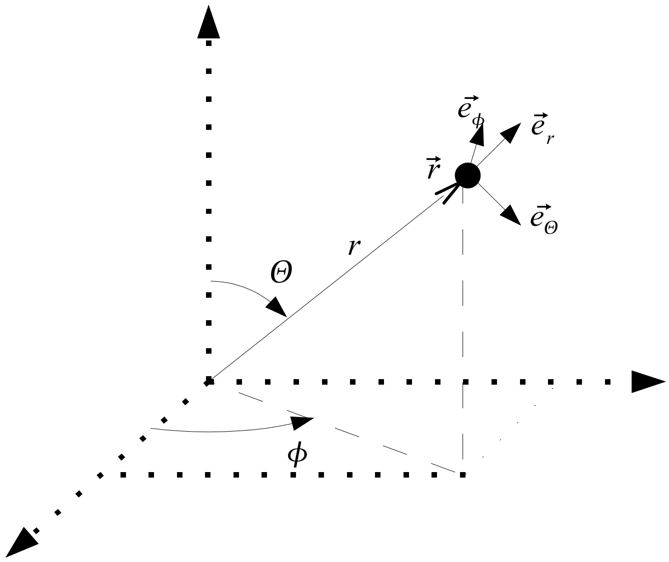
$$\left(\frac{\partial(x\,\vec{e}_x+y\,\vec{e}_y+z\,\vec{e}_z)}{\partial q_a}\right)^2=H_a^2$$

$$H_a^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_a}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_a}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_a}\right)^2$$ – это соотношение удобно использовать при решении задач.

Найдем коэффициенты Ламэ для сферической и цилиндрической систем координат.

Сферическая координатная система:

$$(x, y, z) \Leftrightarrow (r, \Theta, \phi)$$
$$x = r\cdot\sin\Theta\cdot\cos\phi$$
$$y = r\cdot\sin\Theta\cdot\sin\phi$$
$$z = r\cdot\cos\Theta$$



$$\begin{cases} H_r^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \equiv 1 \\ H_\Theta^2 = r^2 \Rightarrow H_\Theta = r \\ H_\phi = r\cdot\sin\Theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V} = 1\cdot\dot{r}\cdot\vec{e}_r + r\cdot\dot{\Theta}\cdot\vec{e}_\Theta + r\cdot\sin\Theta\cdot\dot{\phi}\cdot\vec{e}_\phi \\ \vec{r} = r\cdot\vec{e}_r \end{cases}$$

Вычислим ускорение в сферических координатах.

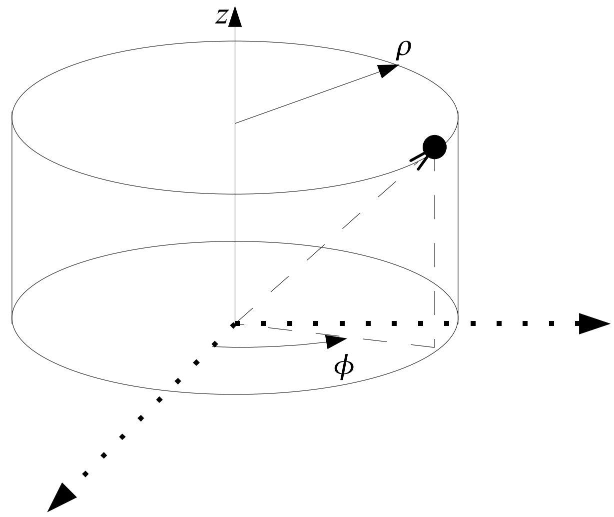
$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d(\cos\Theta\cdot\vec{e}_z) + \sin\Theta\cdot\cos\phi\cdot\vec{e}_x + \sin\Theta\cdot\sin\phi\cdot\vec{e}_y}{dt} =$$
$$= -\sin\Theta\cdot\dot{\Theta}\cdot\vec{e}_z + (\dot{\Theta}\cdot\cos\Theta\cdot\cos\phi - \dot{\phi}\cdot\sin\Theta\cdot\sin\phi)\cdot\vec{e}_x + (\dot{\Theta}\cdot\cos\Theta\cdot\sin\phi + \dot{\phi}\cdot\sin\Theta\cdot\cos\phi)\cdot\vec{e}_y$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \sin\Theta\cdot\cos\phi\cdot\vec{e}_r + \cos\Theta\cos\phi\,\vec{e}_\Theta - \sin\phi\,\vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y = \sin\Theta\cdot\sin\phi\cdot\vec{e}_r + \cos\Theta\sin\phi\,\vec{e}_\Theta + \cos\phi\,\vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z = \cos\Theta\cdot\vec{e}_r - \sin\Theta\,\vec{e}_\Theta \end{cases}$$

Пошаманив немного, можно получить следующий результат для ускорения:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\cdot\dot{\Theta} - r\cdot\sin^2\Theta\cdot\dot{\phi}^2 \\ a_\Theta = r\cdot\ddot{\Theta} + 2\,\dot{r}\cdot\dot{\Theta} - r\cdot\sin\Theta\cdot\cos\Theta\cdot\dot{\phi}^2 \\ a_\phi = r\cdot\sin\Theta\cdot\ddot{\phi} + 2\,\dot{r}\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\Theta + 2\,r\cos\Theta\cdot\dot{\Theta}\,\dot{\phi} \end{cases}$$

Цилиндрическая система координат:



$$(x, y, z) \Leftrightarrow (\rho, \phi, z)$$
$$\vec{r} = z \cdot e_z + \rho \cdot \vec{e}_\rho$$
$$\vec{V} = \dot{z} \cdot \vec{e}_z + \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi$$
$$\begin{cases} a_z = \ddot{z} \\ a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \cdot \ddot{\phi} \\ a_\phi = \dfrac{\frac{1}{\rho} \cdot d}{d\,t} (\rho^2 \cdot \phi) \end{cases}$$

§2. Уравнение движения материальной точки (уравнение Ньютона).

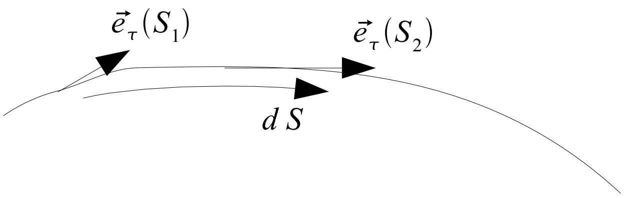
$$\begin{cases} m a_1 = F_1 \\ \quad \ldots \\ \end{cases}$$

Утверждение: для определения траектории материальной точки по уравнению Ньютона требуется 6 начальных условий (координаты и скорости).

Особый случай записи уравнений Ньютона в криволинейной системе координат – это их запись в сопутствующей (неподвижной относительно рассматриваемого тела) системе координат.

Составление ортов сопутствующей системы:

- Первый – направлен так же, как и вектор скорости (т. е. по касательной к траектории в лабораторной системе отсчета)
- Для нахождения второго орта перейдем от t (времени) к длине пройденного пути S.
  $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{st} \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{e}_{\vec{V}} \cdot V = \vec{e}_\tau \cdot V$$
  Найдем ускорение:
  $$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V \cdot \vec{e}_\tau\right) = \dot{V} \vec{e}_\tau + V \cdot \dot{\vec{e}} = \dot{V} \cdot \vec{e}_\tau + V^2 \cdot \frac{d\vec{e}_\tau}{dS}$$
  $$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \frac{d\vec{e}_\tau}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = V \cdot \frac{d\vec{e}_\tau}{dS}$$



при $dS \to 0$, $\dfrac{d\vec{e}_\tau}{dS} \perp \vec{e}_\tau$

Определение. Радиус кривизны и вектор нормали.

$\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}=\vec{e}_n\cdot\frac{1}{R}$; здесь R – это радиус кривизны траектории в данной точке, а $\vec{e}_n$ – вектор нормали.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{V}\cdot\vec{e}_\tau+\frac{V^2}{R}\vec{e}_n$$

Таким образом, в каждой точке траектории частицы ее (траекторию) можно представить в виде дуги окружности с радиусом *R*.

- Третий орт вводится произвольным образом. На практике удобно использовать векторное произведение $\vec{e}_3=\vec{e}_\tau\times\vec{e}_n$.

Так как ускорение имеет только две составляющие, то уравнение Ньютона превратится в систему из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} m\dot{V}=\vec{F}_\tau(\vec{r},\dot{\vec{r}},S) \\ m\frac{V^2}{R}=\vec{F}_n(\vec{r},\dot{\vec{r}},S) \end{cases}.$$

Итак, при рассмотрении сложных потенциальных полей, выражения для физических величин становятся сложными и не универсальными.

§3. Уравнения динамики частицы в ковариантной форме. Уравнение Лагранжа второго рода. Принцип д'Аламбера.

Пусть $\{q_1,q_2,q_3\}$ - произвольная криволинейная система. Введем понятие виртуального перемещения. Пусть $\delta\vec{r}$ - это мгновенное перемещение материальной точки, не связанное с ее собственным движением. При этом $\delta\vec{r}$ может зависеть от точки пространства.

$$m\vec{a}=\vec{F}|\cdot\delta\vec{r}$$

Принцип д'Аламбера:

Принцип д'Аламбера $(m\vec{a}-\vec{F})\cdot\delta\vec{r}=0,\ \forall\delta\vec{r}$ (имеет смысл только при конечных $\delta\vec{r}$).

Перейдем к обобщенным координатам:

$$\delta\vec{r}=\delta\vec{r}(q_1,q_2,q_3)=\sum_i\underbrace{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}}_{\vec{e}_i\cdot H_i}\cdot\delta q_i$$

Следствие: $\left(m\frac{d\vec{V}}{dt}-\vec{F}\right)\sum_i\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\delta q_i=0,\ \forall\delta q_i$ - для *совсем* любых δq_i.

Выберем такие $\delta\vec{r}$ и δq, чтобы $\left(m\frac{d\vec{V}}{dt}-\vec{F}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=0,\ \forall i=1..s$

$m\frac{\partial\vec{V}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\vec{F}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\stackrel{\text{def}}{=}Q_i$, Q_i - это обобщенная сила

Например, если $\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}$ (консервативная сила ⇔ потенциальное поле), то

$$Q_i=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=-\frac{\partial U(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_i}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}-\vec{V}\frac{\partial\vec{V}}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)-\vec{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\vec{V}\frac{\partial\vec{V}}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)}{\partial q_i}$$

> Ну-ну. А теперь докажем, что $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i}$.
>
> $$\left.\begin{aligned}d\vec{r}&=\sum_\alpha\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}dq_\alpha\\ \vec{V}&=\sum_\alpha\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}d\dot{q}_\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}$$
>
> Доказали...

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i^{\,2}}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\cdot\frac{\vec{V}^2}{2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)}{\partial q^2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{m\cdot V^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\cdot\left(\frac{mV^2}{2}\right)=Q_i=\underbrace{-\frac{\partial U}{\partial q_i}}_{\text{если }\vec{F}[\Rightarrow Q]-\text{консервативна}}.$$

Для случая потенциального поля:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\frac{mV^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{mV^2}{2}-U\right)=0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial V}&=0\\ \frac{\partial U}{\partial\dot{q}_i}&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\underbrace{\left(\frac{mV^2}{2}-U\right)}_{\text{функция Лагранжа}}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{mV^2}{2}-U\right)=0$$

$$L\overset{\text{def}}{=}T-U=\frac{mV^2}{2}-U$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ i=1..3$ – уравнение Лагранжа II-го рода. Что характерно – оно ковариантно, т. е. “работает” для любых координатных систем.

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i,\ \ i=1..3$ (*); Q_i - обобщенная сила (не обязательно консервативная, и даже наоборот – как правило, в таком виде записывают диссипативные силы)

Сравнивая (*) с $(m\vec{a}-\vec{F})\,H_i\cdot\vec{e}_i=0$, можно сделать верный вывод, что, в общем, понятие силы равносильно понятию функции Лагранжа.

Обратный вывод остается на совести студентов ☹.

Рассмотрим сферическую системе координат:

$$\vec{V}=\dot{r}\cdot\vec{e}_r+r\cdot\dot{\Theta}\cdot\vec{e}_\Theta+r\cdot\sin\Theta\cdot\dot{\phi}\cdot\vec{e}_\phi$$

$$L_{сф}=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\cdot\dot{\Theta}^2+r^{2cdot}\sin\Theta\cdot\dot{\phi}^2)-\underbrace{U(r,\Theta,\phi)}_{\text{Если поле центральное , то }U(r)}$$

$\frac{d}{dt}(m\cdot r^2\cdot\sin^2\Theta\cdot\dot{\phi})=-\frac{\partial U}{\partial\phi}$ - это проще, чем стандартная запись (с ускорением).

В центральном поле: $m\cdot r^2\cdot\sin^2\Theta\cdot\dot{\phi}=const$

Определение. Обобщенный импульс.

$$p_i=\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}$$

Замечание: размерность импульса зависит от системы координат и от того, по какой координате берется импульс. Например, $[p_\phi]=[m\cdot r^2\cdot\sin^2\Theta\cdot\phi]=[(\vec{M})_z]=\left[[\vec{r}\times\vec{p}]_z\right]=\frac{кг\cdot м^2}{c}$

Вопрос из зала: какой вид имеет функция Лагранжа для гироскопической силы?

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i$$

Сила Лоренца: $\vec{F}=\frac{e}{c}[\vec{V}\times\vec{B}]$

Итак, нужно прояснить вопрос: существует ли такая функция Лагранжа, чтобы выполнялось равенство $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{V}}-\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}=\frac{e}{c}[\vec{V}\times\vec{B}]$

Положим $\vec{B}=rot\,\vec{A}$ (это правда – по математическим причинам).

$$m\ddot{\vec{r}}=\frac{e}{c}\left[\vec{V}\times[\vec{\nabla}\times\vec{A}]\right]=\frac{e}{c}\cdot\vec{\nabla}\cdot(\vec{V}\cdot\vec{A})-\frac{e}{c}\cdot(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{A}=\frac{e}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{V}\cdot\vec{A})-\frac{e}{c}\cdot(\vec{V}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{A}=\frac{d}{(dt)}\frac{\partial}{\partial\vec{V}}\frac{mV^2}{2}$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\vec{V}}\frac{mV^2}{2}+\underline{\frac{e}{c}(\vec{V}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\vec{A}}-\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{V}\cdot\vec{A})=0$. Оно было бы хорошо, если бы не то, что подчеркнуто.

Найдем $\frac{d\vec{A}(\vec{r},t)}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\left(\frac{\vec{V}\cdot\partial}{\partial\vec{r}}\right)\cdot\vec{A}\Rightarrow\left(\frac{\vec{V}\cdot\partial}{\partial\vec{r}}\right)\vec{A}=\frac{d\vec{A}}{dt}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

Вспомним, что если $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\neq0$, то мы имеем дело с электрическим полем. Мы же рассматриваем поле чисто магнитное, но пусть его... $\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

В любом случае, $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\vec{V}}\left(\frac{mV^2}{2}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}\cdot\vec{V}\right)-\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{V}\cdot\vec{A})=0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\vec{V}}\left(\frac{mV^2}{2}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}\cdot\vec{V}\right)-\frac{e}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\vec{V}\cdot\vec{A}+\frac{mV^2c}{2e}\right)=0$$

$$L=\frac{mV^2}{2}+\frac{e}{c}\vec{V}\cdot\vec{A}\neq T-U$$

Таким образом, для гироскопических сил можно записать функцию Лагранжа, но не потенциальную энергию, однако функция Лагранжа не описывает систем, где действуют силы трения. В таких случаях иногда говорят о “потенциальной энергии, зависящей от скорости” (обозначается $\tilde{U}$). Тогда $\vec{F}=-\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\vec{r}}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\vec{V}}$

Глава 2. Механика Лагранжа.

§1. Основы вариационного анализа.

Вариационное исчисление изучает функционалы (отображения множества функций на множество чисел).

Пусть *y(x)* – 1-гладкая функция. Тогда

$J[y(x)]=\int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ - это функционал того вида, который будет рассматриваться в этом курсе.

Пример: длина кривой $l=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx$

Вариация функции – это небольшое изменение значения функции в точке “*x*”, не связанное с изменением аргумента (то, что называется “бросок функции”).

$\delta y(x)=y_1(x)-y_2(x)$

$dy=y'dx$

$\delta dy=d\delta y$ - вариация и дифференциал коммутируют.

$$\tilde{J}=J[y(x)+\delta y(x)]=\int\limits_a^b F(x, y(x)+\delta y(x), y'(x)+\delta y'(x))dx=J+\delta J$$

$$\delta J=\int\limits_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx=\int\limits_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(-\delta y)'\right)dx=$$

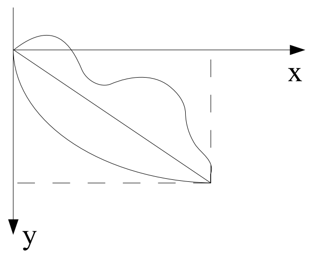
$$=\underbrace{\left.\delta y\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_a^b}_{0,\ \text{т. к. в конечных точках отклонений быть не должно.}}+\int\limits_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta\, dx$$

В точке экстремума $dy=y'dx=0$. Т. о. при достижении экстремума, $\int\limits_a^b\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{0}\delta y(x)dx$.

Получили эйлеровское уравнение: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ – уравнение Лагранжа II-го рода.

Еще пример – задача об экстремуме функционала.

Задача о брахистохроне (поиск оптимальной траектории для наименьшего времени скатывания).



$$t=\int dt=\frac{\int dl}{V}=\frac{\int\limits_0^a\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2\cdot g\cdot y}}=\int\limits_0^a F(y, y', x)dx$$

В дальнейшем ради экономии чернил☺ не будем писать $\sqrt{2\cdot g\cdot y}$.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}=0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}+\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\ y^{3/2}}=0 \quad \Bigg| \cdot\frac{\partial y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$$

Нужно, чтобы оба слагаемых чудесным образом превратились в полную производную.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\frac{y'^2}{y\cdot(1+y'^2)}+\frac{y'}{2\ y^2}=0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{y'^2}{y(1+y'^2)}-\frac{d}{dx}\frac{1}{y}=0$$

$$\frac{y'^2}{y(1+y'^2)}-\frac{1}{y}=C \ \Leftrightarrow\ \frac{y'^2}{1+y'^2}-1=C_y \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{1+y'^2}=C_y$$

$$0<\frac{1}{1+y'^2}=-C_y;\ \ y>0 \text{ по условию } \Rightarrow C<0$$

Опять же, так как константы выбираются произвольно, то можно положить $C>0,\ C_y<0$

$1+y'^2=\frac{1}{C_y}\Rightarrow y'=\pm\sqrt{\frac{1}{C_y\cdot y}-1}$; <u>очевидно</u> (хотя бы из рисунка (см. стр. 11)), что $y'>0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1\ -Cy}}{\sqrt{C_y}}$$

$$dx=\frac{\sqrt{C_y}dy}{\sqrt{1-C_y}}\Rightarrow x(y)=\int\frac{\sqrt{C_y}}{\sqrt{1-C_y}}dy+C_1$$

$$x(y)=\int\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\frac{1}{C_y}-y}}dy=\int\frac{\sqrt{y}\sqrt{y}}{\sqrt{R^2-y}\sqrt{y}}dy=\int\frac{y\cdot 2d\sqrt{y}}{\sqrt{R^2-y}}=2\int\frac{y-R^2+R^2}{\sqrt{R^2-y}}d\sqrt{y}=-2\int\sqrt{R^2-y}\ \ dy+2\int\frac{R^2\,d\sqrt{y}}{\sqrt{R^2-y}}$$

$$x(y)=C_1+2\ R^2\cdot\arcsin\frac{\sqrt{y}}{R}-R^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{y}}{R}+\frac{1}{2}\sin(2\ \arcsin\frac{\xi}{R})\right)$$

$$\int\sqrt{R^2-\xi^2}\,d\xi\overset{\xi=\sin\mu}{=}\int R\cdot\cos\mu\cdot R\cdot\cos\mu\cdot d\mu=$$

$$=\frac{R^2\ \cdot 1}{2}\int(1+\cos 2\mu)d\mu=\frac{R^2}{2}\left(\mu+\frac{1}{2}\sin 2\mu\right)=\frac{R^2}{2}\left(\arcsin\frac{\xi}{R}+\frac{1}{2}\sin(2\ \arcsin\frac{\xi}{R})\right)$$

$$x(y)=C_1+R^2\cdot\arcsin\frac{\sqrt{y}}{R}-\frac{R^2\sqrt{y}}{R}\sqrt{1-\frac{y}{R^2}}$$

Пусть $\frac{\sqrt{y}}{R}=\sin z$.

$$\begin{cases} y=R^2\cdot\sin^{2z} \\ x=C_1+R^2\cdot z-R^{2cdot}\sin z\cdot\cos z \end{cases}$$

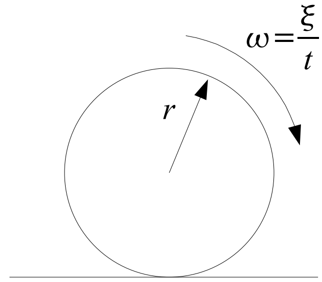
$$x=\frac{R^2}{2}(1-\cos 2z)$$

$$x=C_1+\frac{R^2}{2}\cdot 2z-\frac{R^2}{2}\cdot\sin 2z$$

$$\begin{cases} y(\xi)=r(1-\cos\xi) \\ x(\xi)=r(\xi-\sin\xi)\colon C_1=0 \\ y(a)=b\Rightarrow \textit{Можно найти радиус кривизны } 'r' \end{cases}$$

Этой системой описывается движение точки на ободе колеса:

$$\begin{cases} y=r\left(1-\cos(\omega\cdot t)\right) \\ x=\omega\cdot r\cdot t-r\cdot\sin(\omega\cdot t) \end{cases}$$



Итак, выяснили, что $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$ похоже на $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \Rightarrow$ механику (всю) можно сформулировать в виде принципа наименьшего действия (и следствий из него).

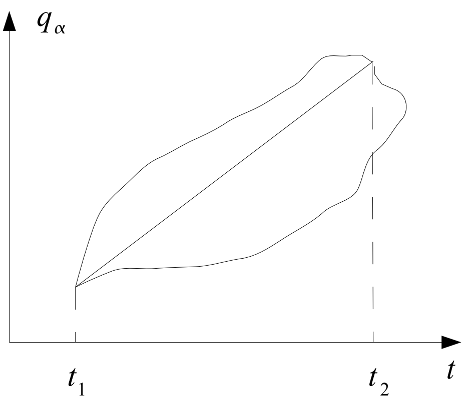
§2. Принцип наименьшего действия Остроградского-Гамильтона. Вывод уравнения Лагранжа из принципа наименьшего действия.

Постулируем:

- Механическая система описывается некой функцией, зависящей от времени, координат системы $q_\alpha(t)$ и их первых (и только первых) производных $\dot{q}_\alpha(t)$ $L(t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$.
- Система ведет себя так, чтобы число $S\left(L(...)\right)=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ было наименьшим (т. н. принцип наименьшего действия). Другое дело, что в некоторых случаях этот принцип не может выполняться.

Таким образом, описание механической системы заключается в нахождении такой функции $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$, что удовлетворяет принципу наименьшего действия для данной системы.

Проекция траектории на (t, q_α) *:*



$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\,dt\Rightarrow\left(\delta S=0\Leftrightarrow\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dd\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\equiv 0,\ \forall\alpha\right)$$

(При условии, что все координаты не зависят друг от друга. В противном случае (при наличии связей) равенство нулю интеграла не влечет за собой обнуления всех членов суммы).

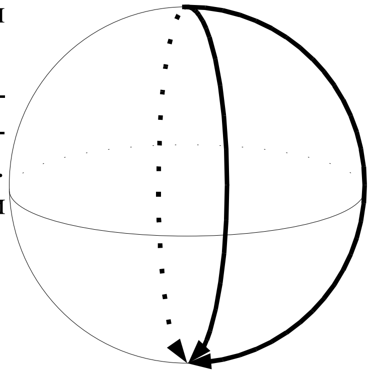
Для определения типа экстремума исследуем вторую производную.

$$\delta S^{(2)}=\overset{\text{линейные по } \delta q_\alpha \text{ члены равны нулю}}{0}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\frac{\partial^2 L}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\delta q_\alpha\cdot\delta q_\beta+\frac{\partial^2 L}{\delta \dot{q}_\alpha \delta \dot{q}_\beta}\delta \dot{q}_\alpha\cdot\delta \dot{q}_\beta+2\frac{\partial^2 L}{\delta q_\alpha \delta \dot{q}_\beta}\delta q_\alpha\cdot\delta \dot{q}_\beta\right)dt$$

Рассмотрим одномерный случай (многомерный отличается непринципиально).

$$\delta S^{(2)}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^2}\delta q^2+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\delta \dot{q}^2+\frac{\partial^2 L}{\delta q \delta \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q^2\right)dt$$

Если эти слагаемые имеют разные знаки, то не достигается ни максимум, ни минимум. В жизни почти всегда достигается строгий минимум.



Точки, соединяющиеся траекторией, не имеющей минимума действия, называются кинетическими фокусами. Пример: скольжение частицы по поверхности шара (от верхнего полюса к нижнему) под действием силы тяжести. Падение по любому меридиану требует одинакового действия $\Rightarrow$ нет ни максимума, ни минимума.

§3. Связь функции Лагранжа с симметрией пространства-времени. Инвариантность функции Лагранжа относительно групповых преобразований.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q(t), \dot{q}(t)\right)dt$$

Найдем функцию Лагранжа для одной частицы во всем пространстве (в смысле – кроме этой частицы там ничего нет).

Постулируем:

- Пустое пространство однородно, т. е. для любого $\vec{a}$ преобразование $\tilde{\vec{r}}=\vec{r}+\vec{a}$ не меняет состояния механической системы: $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0$
- Время однородно, т. е. результат эксперимента не зависит от того, в какой момент его запустили: $\frac{\partial L}{d\,t}=0$
- Пространство изотропно, т. е. ему индифферентно вращение: $L(\vec{V})\Leftrightarrow L(|\vec{V}|)$
- Действует принцип относительности Галилея: покой принципиально неотличим от прямолинейного равномерного движения. Здесь же постулируем *существование* инерциальных систем отсчета, так что этот постулат равносилен Первому закону Ньютона. Нужно, однако, помнить, что принцип Галилея был сформулирован только для небольших по сравнению со скоростью света скоростей.

Вопрос: вообще-то, однозначно ли задана функция Лагранжа?

Ответ: нет, она определена с точностью до полной производной по времени любой функции: одному и тому же поведению системы отвечают функции $L(q, \dot{q}, t)$ и $\tilde{L}(q, \dot{q}, t)=L(q, \dot{q}, t)-\frac{d\,F(q, \dot{q}, t)}{d\,t}$

Доказательство:

Пусть $\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$.

Тогда $\frac{d}{d\,t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q}=\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\underline{\frac{d}{d\,t}\frac{\partial F}{\partial q}}-\frac{\partial L}{\partial q}\underline{-\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial q}-\dot{q}\frac{\partial^2 F}{\partial^2 q}}=0$ ■

$$\tilde{L}=L\left(\vec{v}+\vec{\epsilon}\right)^2$$

$$L\left(\left(\vec{v}+\vec{\epsilon}\right)^2\right)-L\left(v^2\right)\approx\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}\cdot 2\,\vec{v}\vec{\epsilon}\underbrace{=}_{\text{Ещё не доказано}}\frac{d}{d\,t}F(\vec{r})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}\cdot 2\ \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\forall\vec{\epsilon}\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}=const\Leftrightarrow L=const\cdot v^2$$ (для малой $\vec{\epsilon}$)

Для большого $\vec{V}$: $\tilde{\vec{v}}=\vec{v}+\vec{V},\ \tilde{\vec{v}}^2=\vec{v}^2+\underbrace{2\ \vec{V}\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{V}^2}_{\frac{d}{dt}\left(2\ \vec{V}\vec{r}+\vec{V}^2\ t\right)}$

Итак, $L=c\cdot v^2$; константу "c" принято обозначать как "$\frac{m}{2}$"

Отсюда берется стремление большинства систем отдавать кинетическую энергию.

Замечание: возможно, есть и другие преобразования (кроме "$+\frac{dF}{dt}$"*), не меняющие функции Лагранжа; возможно, их и нет – на лекциях этим вопросом особо не задавались; сказали только , что в литературе ничего другого не встречалось.*

Если в пространстве есть поля, то возможны варианты (очевидно, во всех них в том или ином виде будет присутствовать функция Лагранжа одиночной частицы).

На практике встречаются такие комбинации:

- $L=\frac{mv^2}{2}+F\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$
- $L=G_1\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)\cdot\frac{mv^2}{2}+G_2\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$

Используются следующие обозначения:

Частица в потенциальном поле:

$$L=\frac{mv^2}{2}-U\left(\vec{r}\right)$$

Частица в электромагнитном поле:

$$L=\frac{mv^2}{2}+\frac{e}{c}\vec{A}\left(\vec{r},t\right)\vec{v}-e\phi\left(\vec{r},t\right)$$

Для тел с переменной массой:

$$L=\frac{m(\vec{r})\dot{\vec{r}}^2}{2}-U(\vec{r})$$

и т. д.

Функцию Лагранжа можно построить только для *механических* систем (тех, где нет диссипативных сил). Такие силы (н-р, сила трения) добавляются "вручную" в правую часть уравнения Лагранжа II рода.

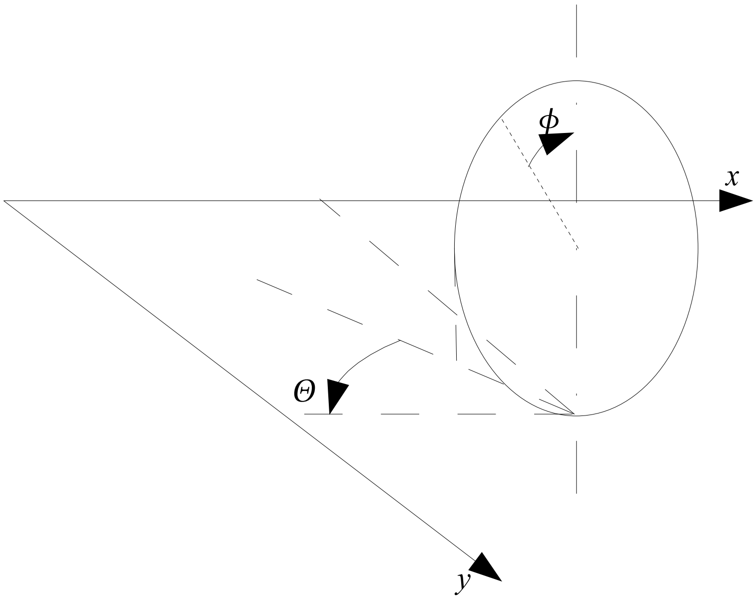
§4. Понятие механической связи, классификация связей.

Говорят, что на систему наложены связи, если существует какая-то зависимость между координатами. Мы будем рассматривать только идеальные (без трения) связи.

Голономная (интегрируемая) связь – это связь, описываемая системой уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(q_1..q_s,t)=0\\ \quad\ldots\\ f_i(q_1..q_s,t)=0\\ \quad\ldots\\ f_n(q_1..q_s,t)=0\end{cases}$$, n – количество связей, s – количество координат

Пример



Здесь участвуют координаты x, y, ϕ, Θ.

Положим $\Theta = const$. Если трения нет, то нет и связей.

Если же диск вообще не проскальзывает, то

$$\begin{cases} R\dot{\phi}(t)\cos\Theta(t) = \dot{x} \\ R\dot{\phi}(t)\sin\Theta(t) = \dot{y} \end{cases}$$

Эти связи голономны, только если $\Theta = const$. В противном случае они не интегрируемы.

Попробуем вывести критерий голономности связи.

Рассмотрим неголономную связь (как более общий случай). *Опытный факт: уравнение связи всегда линейно по скоростям.* Вообще, уравнение неголономной связи – это линейная форма скоростей:

$$a_{i0} + \sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}\dot{q}_\alpha = 0$$

Связь будет интегрируемой, если $\begin{cases} a_{i0} = \dfrac{\partial f_i}{\partial t} \\ a_{i\alpha} = \dfrac{\partial f_i}{\partial q_\alpha} \end{cases}$

Итак, **критерий голономности связи.**

Связь является голономной тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \dfrac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_\beta} = \partial a_{i\beta} \quad \forall \alpha, \beta \\ \dfrac{\partial a_{i0}}{\partial q_\alpha} = \dfrac{\partial a_{i\alpha}}{\partial t} \end{cases}$

Пример голономной связи:

$$x\dot{x} + y^2\dot{y} = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = 3t + c$$

Еще раз, мы рассматриваем только идеальные связи – голономные и неголономные. Впрочем, имеет смысл рассматривать только не интегрируемые связи, как более общий случай.

§5. Принцип наименьшего действия для механических систем с неголономными связями. Неопределенные множители Лагранжа.

$i=1..n$

$$a_{i0}+\sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}\dot{q}_{\alpha}=0$$

$$L(q_1..q_s,\dot{q}_1..\dot{q}_s,t)$$

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

Учтем, что $\tilde{q}_{\alpha}=q_{\alpha}+\delta q_{\alpha},\ \delta q_{\alpha}\big|_{t=t_1,\ t_2}=0$; тогда

$$\delta S=\sum_{\alpha}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}\delta q_{\alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\delta \dot{q}_{\alpha}\right)dt=\sum_{\alpha}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right)\underbrace{\delta q_{\alpha}}_{\text{Если связей нет, то }\delta q_{\alpha}\text{ необязательно равно нулю}}dt$$

$a_{i0}dt+\sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}=0$; вспомним, что мы варьируем $q\Rightarrow dt=0$.

Напишем уравнение связи для вариации (т. е. δq_{α} не являются взаимно независимыми).

$$\sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}\delta q_{\alpha}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\lambda_i(t)}_{\text{произвольная функция времени}}\sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}\delta q_{\alpha}=0$$

Общеизвестно, что к уравнению можно добавить нуль; добавим в качестве нуля этот интеграл.

$$\sum_{\alpha}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}+\sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha}\lambda_i(t)\right)\delta q_{\alpha}dt=0$$

Т.к. есть “*n*” уравнений связи в $\{\delta q_1..\delta q_s\}$, то какие-то “*s-n*”вариаций независимы. Сначала положим все зависимые δq_i равными нулю, а затем наоборот – выберем нулевыми независимые δq_i (ведь конкретное значение вариации выбираем мы сами) – из равенства нулю скобки в обоих случаях можно будет найти $\lambda_i(t)$.

λ_i – это и есть так называемые неопределенные множители Лагранжа.

$$Q_{\alpha}=\sum_{i=1}^{s}a_{i\alpha}\lambda_i(t)=\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$$ – обобщенная сила реакции.

То есть у нас есть “*s*+*n*” уравнений ($\alpha=1..s$ и “*n*” уравнений связи) и “*s*+*n*”неизвестных (q_{α} и λ_i). Замечательно. Такая система допускает однозначное решение.

Но из “ $s+n$ ” уравнений “ s ” – 2-го порядка и “ n ” – первого, т. е. для полного решения нужно задать “ $2s+n$ ” начальных условий. Из них “ $2s$ ” – это начальные скорости и координаты. Видимо, еще “ n ” констант может быть получено из уравнений связи $\left(\lambda_i\big|_{t=0}\right)$

Вопрос: а что, если связь не голономная: $F_i(q_{\alpha},\dot{q}_{\alpha},t),\ i=1..n$?

$$\sum_{\alpha}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right)\delta q_{\alpha}dt$$

$$F_i(q_{\alpha}+\delta q_{\alpha},\dot{q}_{\alpha}+\delta\dot{q}_{\alpha},t)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\left(\sum_\alpha \frac{\partial F_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial F_i}{\partial \dot q_\alpha}\delta \dot q_\alpha\right)=0$$

Разложим в ряд Тейлора.

Добавим “0” к интегралу для получения возможности интегрирования по частям.

Положим $\tilde{L}=L+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)F_i$

$$\sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\delta \dot q_\alpha+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\frac{\partial F_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\frac{\partial F_i}{\partial \dot q_\alpha}\delta \dot q_\alpha\right)dt=\sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot q_\alpha}\delta \dot q_\alpha\right)dt$$

Такие уравнения связей не используются. Удобнее рассматривать только линейные уравнения.

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(t)a_{i\alpha}\\ a_{i0}+\sum\limits_\alpha a_{i\alpha}\dot q_\alpha=0\end{cases}$$

Голономная связь: $f_i(q_1..q_s,t)=0$ (нет явной зависимости от $\dot q_\alpha$)

Возьмем производную по времени:

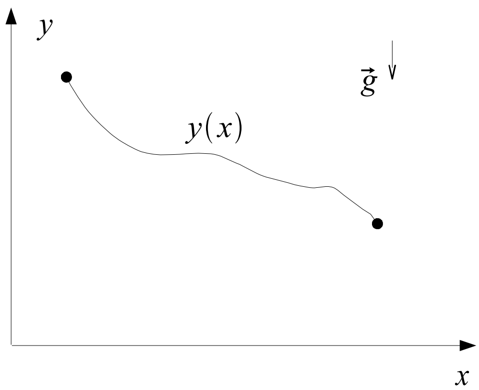
$$\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial t}}_{a_{i0}}+\sum_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\underbrace{\dfrac{\partial f_i}{\partial q_\alpha}}_{a_{i\alpha}}\\ f_i(q_1..q_s,t)=0\end{cases}$$

Для голономных связей и $\tilde{L}=L+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)f_i$, $\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot q_\alpha}-\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\alpha}=0\\ f_i(q_1..q_s,t)=0\end{cases}$

Утверждение: для голономных связей и некой функции Лагранжа можно построить такую эквивалентную функцию Лагранжа, что она будет уже в себе содержать все голономные связи, присутствующие в системе.

Примеры:



$$\begin{cases}L=\dfrac{m}{2}\left(\dot x^2+\dot y^2\right)-mgy\\ y-y(x)=0\end{cases}$$

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\left(y'(x)\cdot x\right)2\right)-m\,g\,y(x)=L(x,\dot{x},t)$$

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1+y'^2(x)\right)-m\,g\,y(x)$$

Положим здесь $m(x)=m\left(1+y'^2(x)\right)$

$L=\frac{m(x)\dot{x}^2}{2}-U(x)$, т. е. исходная задача свелась к одномерной задаче о движении тела переменной массы в потенциальном поле, причем

$$\tilde{L}(\dot{x},\dot{y},x,y,t)=L+\lambda(t)\quad\underbrace{\left(y-y(x)\right)}_{\equiv 0\ -\text{по условию задачи.}}$$

$$\begin{cases} m\,\ddot{y}=-m+\lambda(t) & \Big|\ \cdot\frac{d\,y}{d\,x} \\ m\,\ddot{x}=-\lambda(t)\frac{d\,y(x)}{d\,x} \\ y=y(x) \end{cases}$$

$$m\,\ddot{y}\frac{d\,y}{d\,x}+m\,\ddot{x}=-m\,y\frac{d\,y}{d\,x}$$

$$\dot{y}=y'(x)\dot{x}$$

$$\ddot{y}=y'(x)\ddot{x}+y''(x)\dot{x}^2$$

$$m\,y'\cdot\left(y'\ddot{x}+y''\dot{x}^2\right)+m\,\ddot{x}=-m\,g\,y'$$

Теперь посмотрим, какое уравнение движения получится из условия $L=\frac{m(x)\dot{x}^2}{2}-U(x)$

$$\frac{d}{d\,t}\dot{x}\,m(1+y'^2)=\ddot{x}\,m\,y'^2\ +2\ \dot{x}\,m\,y'\,y''\,\dot{x}=-m\,g\,y'+m\,\dot{x}^2\ y'\,y''$$

Пусть неявно задана траектория $f(x,y)=0$

$$\begin{cases} m\,\ddot{y}=-m\,g+\lambda(t)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} & \Big|\cdot\dot{y} \\ m\,\ddot{x}=+\lambda(t)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \Big|\cdot\dot{x} \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

Учтем, что $\frac{d\,f}{d\,t}=\frac{\partial\dot{f}}{\partial y}+\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$. Следовательно, эквивалентной этой системе будет такая:

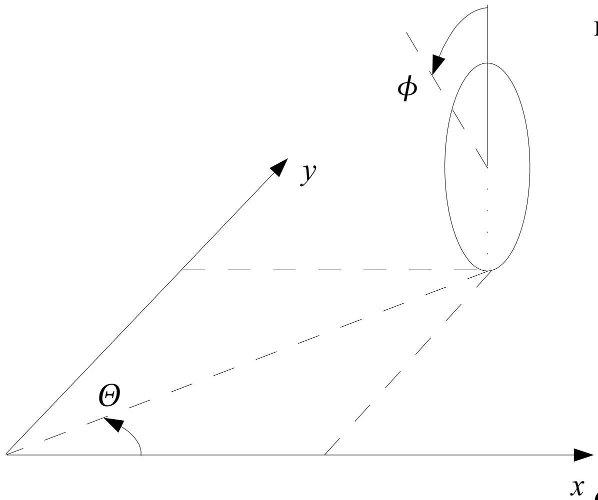
$$\begin{cases} \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=-m\,g\,y+E \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\dot{x}=-\dot{y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)¿\,/\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\begin{cases}\frac{m}{2}\dot{y}^2\left(1+\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) ¿ \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)^2\right)+m g y=E\\ f(x,y)=0\end{cases}$$

В общем случае дальше ничего упростить нельзя.

Пример задачи с неголономными связями:



координаты: $\{x,y,\Theta,\phi\}$

Связи: $\begin{cases}\dot{x}=R\dot{\phi}\cos\Theta(t)\\ \dot{y}=R\dot{\phi}\sin\Theta(t)\end{cases}$

$a_{i0}+\sum_{\alpha}a_{i\alpha}\dot{q}_{\alpha}=0$, $a_{i0}=0$;

$$\begin{cases}a_{1\,x}=1,\ a_{1\,y}=0,\ a_{1\,\Theta}=0,\ a_{1\,\phi}=-R\cos\Theta\\ a_{2\,x}=0,\ a_{2\,y}=1,\ a_{2\,\Theta}=0,\ a_{2\,\phi}=-R\sin\Theta\end{cases}$$

Пусть силы тяжести нет (а трение идеально).

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{I_{\Theta}\dot{\Theta}^2}{2}+\frac{I_{\phi}\dot{\phi}^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\alpha}}=\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)a_{i\alpha}$$

$$\begin{cases}m\ddot{x}=\lambda_1(t)a_{1\,x}+\lambda_2(t)\underbrace{a_{2\,x}}_{0}=\lambda_1=F_x & (1)\\ m\ddot{y}=\lambda_1(t)\underbrace{a_{1\,y}}_{0}+\lambda_2(t)a_{2\,y}=\lambda_2\ =F_y & (2)\\ I_{\Theta}\ddot{\Theta}=0 & (3)\\ I_{\phi}\ddot{\phi}=-R\cos\Theta\lambda_1(t)-R\sin\Theta\lambda_2(t)=K_{\phi} & (4)\\ \dot{x}=R\dot{\phi}\cos\Theta(t) & (5)\\ \dot{y}=R\dot{\phi}\sin\Theta(t) & (6)\end{cases}$$

Из (3): $\Theta(t)=\omega_0 t+\Theta_0$

$I_{\phi}\ddot{\phi}=-R\cos\Theta\, m\ddot{x}-R\sin\Theta\, m\ddot{y}=K_{\phi}$, или

$$I_{\phi}\ddot{\phi}=K_{\phi}=-\frac{\dot{x}}{\dot{\phi}}m\ddot{x}-\frac{\dot{y}}{\dot{\phi}}m\ddot{y}$$

$$\frac{I_{\phi}\dot{\phi}^2}{2}=-\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{m}{2}\dot{y}^2+\tilde{E}$$

Вспомним: $\begin{cases} \dot{x}=R\dot{\phi}\cos\theta \\ \dot{y}=R\dot{\phi}\sin\Theta \\ \dfrac{I_\phi\dot{\phi}^2}{2}+\dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\tilde{E} \end{cases}$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=R^2\dot{\phi}^2$$

$$\frac{\left(I_\phi+mR^2\right)\dot{\phi}^2}{2}=\tilde{E}$$

$$\phi(t)=\omega_\phi t+\phi_0$$

$$\begin{cases} \dot{x}=R\omega_\phi\cos(\omega_\Theta t+\Theta_0) \\ \dot{y}=R\omega_\phi\sin(\omega_\Theta t+\Theta_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t)=x_0-R\dfrac{\omega_\phi}{\omega_\Theta}\sin(\omega_\Theta t+\Theta_0) \\ y(t)=y_0-R\dfrac{\omega_\phi}{\omega_\Theta}\cos(\omega_\Theta t+\Theta_0) \end{cases}$$

Уравнение окружности : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\dfrac{\omega_\phi^2}{\omega_\Theta^2}$

§6. Энергия системы в механике Лагранжа. Закон сохранения энергии.

Пусть некая система описывается функцией Лагранжа $L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t)$.

Уравнения связей системы: $a_{i0}+\sum\limits_\alpha a_{i\alpha}q_\alpha=0$ $для\, i=1..n$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\sum_i\lambda_i(t)q_{i\alpha}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\dot{q}_\alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\sum_{i=1}^n\lambda_i(t)a_{i\alpha}\right)+\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial t}-\dot{q}_\alpha\sum_{i=1}^n\lambda_i(t)a_{i\alpha}+\frac{d}{dt}\left(q_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}+q_\alpha\sum_{i=1}^n\lambda_i(t)a_{i\alpha}=-\frac{\partial L}{\partial t}a_{i0}+\sum_{i=1}^n\lambda_i(t)a_{i0}$$

$$L=\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}-U(\vec{r})$$

$$\dot{\vec{r}}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}-L=m\dot{\vec{r}}^2-\frac{m\dot{\vec{r}}}{2}+U(\vec{r})$$

Полной энергией системы называют величину $E=\sum\limits_\alpha\dot{q}_\alpha\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-L$

Очевидно, $\dfrac{dE}{dt}=-\dfrac{\partial L}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(t)a_{i0}$

Энергия сохраняется, если

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t}=0 \\ a_{i0}=0\ \forall i \end{cases}$$ (для голономной связи это требование сводится к тому, что уравнения связей не содержат явно времени)

Разумеется, возможен вариант, когда ни одно условие не выполняется, однако $\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i \lambda_i(t) a_{i0}\equiv 0$, но такие случаи являются очень редкой экзотикой.

§7. Алгоритм решения механических задач методом Лагранжа.

1. Вводим систему координат. Для упрощения решения задачи, ее координатные поверхности должны совпадать с эквипотенциальными поверхностями полей исходной задачи.
2. Выяснить, от каких аргументов зависит функция Лагранжа системы. Если есть связи, написать их уравнения. Построить функцию Лагранжа.
3. Написать уравнения законов сохранения: $E=\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-L=const$.

   Если $\frac{\partial L}{\partial q_\beta}=0$, то $p_\beta=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}=const$.

   Вопрос для экзамена: нужны ли для выполнения закона сохранения импульса дополнительные ограничения на связи?
4. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) a_{i\alpha}, \qquad \alpha=1..s$

   По возможности, заменить как можно больше уравнений этой системы на уравнения законов сохранения.
5. $q_\alpha(t, C_1..C_s)$
6. $q_\alpha\big|_{t=0}, \dot{q}_\alpha\big|_{t=0} \Rightarrow C_1..C_s$

Общее утверждение: по виду функции Лагранжа можно в общем виде построить интеграл движения.

§8. Общий вид законов сохранения. Теорема Нетер.

Вопрос: в каком случае инфинитезимальное (неограниченно малое) колебание (шевеление) не повлияет на поведение системы?

Ответ, в общем, известен: $L\,dt=\tilde{L}\,d\tilde{t}+dF$

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

Рассмотрим шевеления всех координат (ϵ – некий параметр, обеспечивающее *малость* шевеления):

$$\tilde{q}_\alpha=q_\alpha+\epsilon\,\psi_\alpha(q_1..q_s, t)$$
$$\tilde{t}=t+\epsilon\,X(q_1..q_s, t)$$
$$L=L\left(q_\alpha, \frac{d q_\alpha}{dt}, t\right)$$
$$\tilde{L}=L\left(\tilde{q}_\alpha, \frac{d\tilde{q}_\alpha}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right)$$

$\delta S=0$, $\delta\tilde{S}=0$ $\Rightarrow$ нужно, чтобы не менялись граничные условия.

$$L\,dt = L\left(q_\alpha+\epsilon\Psi_\alpha, \frac{d(q_\alpha+\epsilon\Psi_\alpha)}{d(t+\epsilon X)}\right)d(t+\epsilon X)+dF$$

$$\frac{d(q_\alpha+\epsilon\Psi_\alpha)}{d(t+\epsilon X)}=\frac{\dot q+\epsilon\frac{d\Psi_\alpha(q_1..q_s,t)}{dt}}{1+\epsilon\frac{dX}{dt}}=\dot q_\alpha+\epsilon\dot\Psi_\alpha-\epsilon\dot q_\alpha\dot X$$

$$L\,dt=\left(L+\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\epsilon\Psi_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\left(\epsilon\dot\Psi_\alpha-\epsilon\dot q_\alpha\dot X\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\epsilon X\right)\left(dt+\epsilon\,dX\right)+dF$$

$$L\,dt=L\,dt+\epsilon\Psi_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dt+(\epsilon\dot\Psi_\alpha-\epsilon\dot q_\alpha\dot X)\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}+\epsilon X\frac{\partial L}{\partial t}dt+\epsilon L\,dX+dF$$

$$\epsilon\Psi_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+\left(\epsilon\dot\Psi_\alpha-\epsilon\dot q_\alpha\dot X\right)\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}+\epsilon X\frac{\partial L}{\partial t}+\epsilon L\dot X+\dot F=0$$

Теперь домножим последнее равенство на $\frac{1}{\epsilon}$ и введем обозначение $\dot f=\frac{\dot F}{\epsilon}$

$$\underline{\Psi_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}+(\underline{\dot\Psi_\alpha}-\dot q_\alpha\dot X)\underline{\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}}+X\frac{\partial L}{\partial t}+L\dot X+\dot f=0$$

Хочется, чтобы сие преобразование не портило не только функцию Лагранжа, но и уравнения связей.

$$\frac{d}{dt}\left(\Psi_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\right)-\dot X\left(q_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}-L\right)+X\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{df}{dt}=0$$

$$E=\dot q_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}-L$$

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}-\underbrace{\sum_i\lambda_i(t)a_{i0}}_{0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\Psi_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\right)-\frac{d}{dt}(XE)+\frac{df}{dt}=0$$

Формулировка теоремы Нетер.

Если система не чувствует инфинитезимального преобразования, то сохраняются следующие величины (как их часто называют, интегралы движения):

$$\sum_\alpha\Psi_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}EX+f=const$$

$$\sum_\alpha\Psi_\alpha p_\alpha-EX+f=const$$

$\begin{cases}\tilde q_\alpha q_\alpha+\epsilon\Psi_\alpha(q,t)\\ \tilde t=t+\epsilon X(q,t)\end{cases}$ – если при этом $L\,dt=\tilde L\,dt+\epsilon\,dt$, т. е. выполняется условие теоремы Нетер, то $\sum_\alpha p_\alpha\Psi_\alpha-EX+f=const$

Утверждение: если одна из координат является циклической, то функция Лагранжа от нее не зависит, т. е. соответствующий импульс сохраняется.

Если $\begin{cases}\tilde x=x+\epsilon\\ \tilde t=t\end{cases}$, т. е. $p_x=0$

или $\begin{cases} \tilde{x}=x \\ \tilde{t}=t+\epsilon \end{cases}$ $(E=const)$,

тогда $L\equiv\tilde{L}$.

Рассмотрим бесконечно малое преобразование Галилея.

$$\begin{cases} \tilde{x}=x-\epsilon V t \\ \tilde{t}=t \end{cases}$$

$$L=\frac{m v^2}{2}$$

$$\tilde{L}=\frac{m}{2}\left(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\right)^2=L-m\dot{x}V\epsilon+\underbrace{\epsilon^2\ldots}_{\text{не учитываем}}=L+\epsilon\frac{d}{dt}(-mVx)$$

$$L=\tilde{L}+\epsilon\frac{d}{dt}(mVx)$$

т. о. здесь $\begin{cases} X\equiv 0 \\ \Psi_x=-Vt \\ f=mVx \end{cases}$ – по теореме Нетер

$$p_x\cdot(-Vt)+mVx=const$$

$$p_x t-mx=const$$

Действительно, как известно чуть ли не со школы, $mx-p_x t=mx_0$

Более сложный пример – движение частицы в поле электромагнитной волны.

$$\vec{E}=\vec{E}(x-ct)$$

Пусть $\begin{cases} \tilde{x}=x+\epsilon \\ \tilde{t}=t=\dfrac{\epsilon}{c} \end{cases}$; тогда $\tilde{x}-c\tilde{t}=x-ct$.

$$L=\frac{m v^2}{2}+\frac{e}{c}\vec{v}\vec{A}(x-ct)-e\phi(x-ct)$$

$L=\tilde{L}$;

$$\begin{cases} \Psi_x=1 \\ x=\dfrac{1}{c} \end{cases}$$

$\boxed{p_x c-E=const}$ – уже не столь очевидный результат, как в предыдущем примере.

Еще пример: пусть система такова, что не чувствует сдвига по винтовой линии.

$L(t,\dot{z},\dot{\rho},\dot{\phi},\rho,z,\phi)\Leftrightarrow L(t,\dot{z},\dot{\rho},\dot{\phi},\rho,z+\gamma\phi)$, т. е. наличествует голономная связь. Найдем ее уравнение.

$\begin{cases} \tilde{z}=z+\epsilon \\ \tilde{\phi}=\phi+2\pi\dfrac{\epsilon}{h} \end{cases}$ – здесь “h” – это шаг винтовой линии.

$$\tilde{z}-\frac{h}{2\pi}\tilde{\phi}=z-\frac{h}{2\pi}\phi$$

$$\gamma=-\frac{h}{2\pi}$$

$\sum_\alpha p_\alpha \Psi_\alpha = const$: для нашей системы $p_z + p_\phi \frac{2\pi}{h} = const \Leftrightarrow p_z h + 2\pi M_z = const$

И еще один пример. $L\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2, y + 2x^2\right)$ – видимо, это предлагается студентам на самостоятельный разбор.

Вопрос: сколько всего интегралов движения можно найти с помощью теоремы Нетер?

Имеем:

- s координат: $\{q_1 .. q_s\}$
- Начальные условия: $\begin{cases} q_\alpha\}_{t=0} = q_{\alpha 0} \\ \dot{q}_\alpha\}_{t=0} = v_{\alpha 0} \end{cases}$

$\begin{cases} q_\alpha(t, q_{\alpha 0}, v_{\alpha 0}) \\ \dot{q}_\alpha(t, q_{\alpha 0}, v_{\alpha 0}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{\alpha 0}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = C_\alpha \\ v_{\alpha 0}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = \tilde{C}_\alpha \end{cases}$ – константы. Итого – $2s$ интегралов движения (в том случае, когда известны скорости и координаты в нулевой момент времени).

Если условия задаются в некий произвольный момент времени, то

$\begin{cases} q_\alpha(t, q_{\alpha 0}, v_{\alpha 0}, t_0) \\ \dot{q}_\alpha(t, q_{\alpha 0}, v_{\alpha 0}, t_0) \end{cases} \Rightarrow t_0 = const \Rightarrow$ всего $2s-1$ интегралов движения (t_0 мы выбираем сами, а не вычисляем) – общее число интегралов движения, вычисляемых с помощью теоремы Нетер.

Глава 3. Механика Гамильтона.

§1. Переход к новым динамическим переменным. Преобразование Лежандра (переход от лагранжевой механики к гамильтоновой).

В механике Лагранжа действо происходит в т. н. конфигурационном пространстве – s-мерном пространстве координат.

В гамильтоновой механике пользуются $2s$-мерным фазовым пространством – здесь по s координатным осям откладываются координаты и еще по s - проекции импульса или (реже) скорости.

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \rightarrow H\left(q_\alpha, p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, t\right)$$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}_{p_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$p_\alpha d\dot{q}_\alpha = d(p_\alpha \dot{q}_\alpha) - \dot{q}_\alpha dp_\alpha$$

$$d(\underbrace{p_\alpha \dot{q}_\alpha - L}_{H}) = \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

– уравнения движения в механике Гамильтона. Они же – канонические уравнения движения (каноническими их объявили потому, что они имеют самый простой вид).

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\ \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{cases}$$

$$p_\alpha(t, p_{0\alpha}, q_{0\alpha}), q_\alpha(t, p_{0\alpha}, q_{0\alpha})$$

“s” уравнениям второго порядка лагранжевой механики соответствуют *“2s”* уравнений первого порядка механики Гамильтона. Как будет показано позже, эти два способа представления не вполне эквивалентны: механика Лагранжа описывает только механические системы, тогда как с помощью канонических уравнений можно решать более широкий спектр динамических задач.

§2. Вывод уравнений Гамильтона из принципа наименьшего действия. Аксиоматика Гамильтона.

Постулаты механики Гамильтона:

1. Механическую систему с *“s”* степенями свободы можно описать с помощью *“2s”* переменных $Q_1 .. Q_{2s}$ и их функции $H(Q_i, t)$

2. Система ведет себя так, что величина $S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{\alpha} p_\alpha d q_\alpha - H(p_\alpha, q_\alpha t)\right)dt$ достигает наименьшего значения.

Вывод уравнений движения:

$$\delta S=0=\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta p_\alpha d q_\alpha + p_\alpha d\,\delta q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right)dt$$

Учтем, что $\begin{cases}\delta p\big|_{t=t_1}=\delta p\big|_{t=t_2}=0\\ \delta q\big|_{t=t_1}=\delta q\big|_{t=t_2}=0\end{cases}$

$$\delta S=\int\ldots=\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta p_\alpha\left(d q_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}dt\right)+\delta q_\alpha\left(-d p_\alpha-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}dt\right)\right)=0$$

$$\begin{cases} d q_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}dt\\ d p_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}dt\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot q_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}\\ \dot p_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}\end{cases}$$

Здесь мы предполагаем, что связей нет (т.е. p_α и p_β независимы).

Вопрос для экзамена: как изменится вывод, если наличествуют связи?

$H=p_\alpha \dot q_\alpha - L$

Полный вывод канонических уравнений строится аналогично выводу уравнения Лагранжа:

$$H(\vec p,\vec r,t)\underbrace{\rightarrow}_{\text{однородность времени}}H(\vec p,\vec r)\underbrace{\rightarrow}_{\text{однородность пространства}}H(\vec p)\underbrace{\rightarrow}_{\text{изотропность пространства}}H(p)\underbrace{\rightarrow}_{\text{принцип Галилея}}H=\frac{p^2}{2m}$$

$$\begin{cases}\dot p_\alpha=-\dfrac{\partial H(p,q,t)}{\partial q}\\ \dot q_\alpha=\dfrac{\partial H(p,q,t)}{\partial p}\end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial q}=0$$

Как уже замечалось, уравнения Гамильтона и уравнение Лагранжа не эквивалентны: два уравнения первого порядка могут иметь больше корней, чем одно уравнение второго порядка.

Поразмыслим...

Пусть есть произвольная система $\begin{cases}\dot p=f(p,q,t)\\ \dot q=g(p,q,t)\end{cases}$.

Для гамильтоновой системы выполняется также следующее соотношение: $\dfrac{\partial f}{\partial p}=\dfrac{\partial g}{\partial q}$.

Собственно говоря, это есть критерий принадлежности динамической системы механическим системам.

Рассмотрим такую задачу: движение фотона.

$\epsilon=\hbar\omega$

$p=\hbar k=\dfrac{\hbar\omega}{c}$

$\epsilon=|\vec p|c$

$$H=|\vec{p}|c$$

$$\dot{\vec{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}=0$$

$$\dot{\vec{r}}=\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}=c\frac{\partial |\vec{p}|}{\partial \vec{p}}=c\frac{\vec{p}}{p}$$

Теперь попробуем описать движение фотона функцией Лагранжа.

$$L=\sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} p_{\alpha}-H=\sum_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} p_{\alpha}-H$$

$$L=\vec{p}\,\frac{\partial |\vec{p}|c}{\partial p_{\alpha}}-|\vec{p}|c=0\ \dots$$

Еще раз – на всякий случай. Если на систему действуют немеханические силы, то они просто дописываются как обобщенные силы.

§3. Скобки Пуассона. Интегралы движения в гамильтоновой механике.

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial f}{\partial p}\dot{p}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}$$

Определение. Скобки Пуассона.

Скобки Пуассона функций h и g по переменным p и q – это $\{h, g\}_{p,q}=\sum_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial p_{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}}-\sum_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial q_{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}}$

Таким образом, $\frac{d f(q,p,t)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{H, f\}$

Тогда $\begin{cases} \dot{p}=\{H, p\}=\frac{\partial H}{\partial p}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial q}}_{0}-\frac{\partial H}{\partial q}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial p}}_{1} \\ \dot{q}=\{H, q\}=\frac{\partial H}{\partial p}\underbrace{\frac{\partial q}{\partial q}}_{1}-\frac{\partial H}{\partial q}\underbrace{\frac{\partial q}{\partial p}}_{0} \end{cases}$

Критерий интеграла движения в гамильтоновой механике.

Если величина “f” явно не зависит от времени $\left(\frac{\partial f}{\partial t}=0\right)$, то $\frac{df}{dt}=0 \Leftrightarrow \{H, f\}=0$

Посчитаем решение уравнений Гамильтона в виде рядов.

Введем оператор сдвига по времени. Для этого проинтегрируем гамильтоновы уравнения в общем виде – это трудно было делать в лагранжевой механике:

Хочется определить преобразование $q(0)\rightarrow q(t)$

Все функции, с которыми мы имеем дело, гладки по крайней мере до 2-й производной.

$$f(x+a)=f(x)+f'_x a+\frac{f''_x}{2!}a^2+\dots=\underbrace{e^{a\frac{d}{dx}}}_{\hat{T}_a} f(x)$$

$p(t)=p(0)+\dot{p}(0)t+\frac{\ddot{p}(0)t^2}{2}+\dots$ – кстати, большой вопрос: хватит ли первых трех членов для достижения удовлетворительной точности на практике?!!

$$p(t)=p(0)+\dot{p}(0)t+...=p(0)+\{H,p(t)\}\big|_{t=0}t+\frac{\{H,\{H,p(t)\}\}\big|_{t=0}t^2}{2}$$

$$H=\frac{p^2}{2m}\frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

$$\begin{cases}p(0)=p_0\\ q(0)=q_0\end{cases};\quad H\big|_{t=0}=\frac{p_0^2}{2m}+\frac{m\omega^2 q_0^2}{2}$$

$$\{H,p\}\big|_{t=0}=\frac{m\omega^2}{2}\{q^2,p\}\big|_{t=0}=-\frac{m\omega^2}{2}\cdot 2q_0\cdot 1=-m\omega^2 q_0$$

$$\left\{\frac{p^2}{2m},-m\omega^2 q\right\}\Bigg|_{t=0}=-\frac{\omega^2}{2}\cdot 2\ p_0\cdot 1=-\omega^2\ p_0$$

$$p(t)=p(0)-m\omega^2 q(0)t-\frac{\omega^2\ p(0)}{2\ !}t^2+\frac{m\omega^2\ q(0)\cdot\omega^2\ t^3}{3\ !}+\frac{\omega^4\ p(0)t^4}{4!}-...=p_0\cos\omega t-m\omega q_0\sin\omega t$$

$$p(t)=p_0+\{H,p\}\big|_{t=0}+...=\hat{T}_t p_0$$

Запишем $\hat{T}_t$ в явном виде:

$$\hat{T}_t p_0=e^{t\left(\frac{\partial H}{\partial p}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial q}\Big|_{t=0}-\frac{\partial H}{\partial q}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial p}\Big|_{t=0}\right)}p_0\Leftrightarrow e^{t\{H,\ ...\ \}|_{t=0}}p_0$$

Для гармонического осциллятора: $T_t=e^{t\left(\frac{p_0}{m}\frac{\partial}{\partial q}\Big|_{t=0}-m\omega^2 q_0\frac{\partial}{\partial p}\Big|_{t=0}\right)}$

§4. Алгебра скобок Пуассона.

Свойства скобок Пуассона:

1. $\{f,g\}=-\{g,f\}$
2. $\{f,const\}=0$
3. $\{f,g_1+g_2\}=\{f,g_1\}+\{f,g_2\}$
4. $\{f,g\cdot h\}=h\cdot\{f,g\}+g\cdot\{f,h\}$
5. ***Тождество Якоби:*** $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$
6. ***Теорема Пуассона.***

   Скобка Пуассона двух интегралов движения – тоже интеграл движения (при этом не гарантируется, что получится *независимый* интеграл).

   Доказательство:

   Пусть *f (q, p, t)* и *g (q, p, t)* – интегралы движения, т. е. $\begin{cases}\frac{df}{dt}=0\\ \frac{dg}{dt}=0\end{cases}$ и пусть *h = {f, g},*

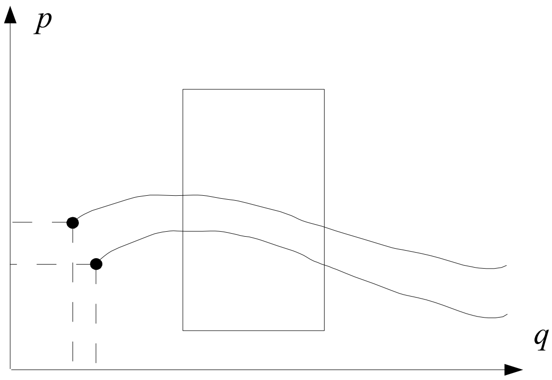
   тогда $\frac{dh}{dt}=\frac{\partial h}{\partial t}+\{H,h\}=\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}+\{H,\{f,g\}\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{f,\{g,H\}\}-\{g,\{H,f\}\}=$

   $$=\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}-\{g,H\}\right\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\{h,\{f,g\}\}=\left\{f,\underbrace{\frac{\partial g}{\partial t}-\{g,H\}}_{\frac{dg}{dt}=0}\right\}+\left\{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\}}_{\frac{df}{dt}=0},g\right\}=0.$$

§5. Фазовый анализ. Движение гамильтоновых систем. Особые точки в фазовом пространстве.

При незначительном изменении начальных условий на начальном этапе движения фазовая траектория идет почти параллельно невозмущенной траектории (т. к. обычно решение диф. уравнения плавно).

Однако на фазовой траектории могут существовать точки с областями, где невозможно нарисовать какую бы то ни было фазовую траекторию.



В особых точках не существует производная $\dfrac{dp}{dq}$ (не равна $\pm\infty$, а неопределена). Как правило, в особых точках $\dfrac{dp}{dq}=\dfrac{0}{0}$.

$$\frac{dp}{dq}=\frac{0}{0}=\frac{dp}{dt}\frac{dt}{dq}=-\frac{\partial H/\partial q}{\partial H/\partial p}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H(p^*,q^*,t)}{\partial q}=0\\[2mm]\dfrac{\partial H(p^*,q^*,t)}{\partial p}=0\end{cases}$$

Мы будем рассматривать только стационарный случай: $\begin{cases}\left.\dfrac{\partial H}{\partial q}\right|_{p=p^*,\,q=q^*}=0\\[2mm]\left.\dfrac{\partial H}{\partial p}\right|_{p=p^*,\,q=q^*}=0\end{cases}$

$$H(p,q)=E$$

$$H(p^*,q^*)=E^*$$

$$H(p,q)=H(p^*,q^*)+\underbrace{\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{p=p^*}}_{0}(p-p^*)+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right|_{p=p^*}(p-p^*)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\right|_{q=q^*}(q-q^*)^2+\left.\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}\right|_{p=p^*,\,q=q^*}(p-p^*)(q-q^*)=E$$

Положим $P=p-p^*$, $Q=q-q^*$:

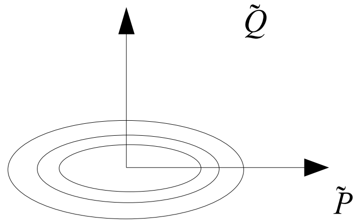
$E-E^*=\dfrac{\alpha}{2}P^2+\dfrac{\beta}{2}Q^2+\gamma\,PQ=a\,\tilde{P}^2+b\,\tilde{Q}^2$ – привели квадратичную форму координат P и Q к диагональному виду.

Рассмотрим различные варианты знаков коэффициентов a и b (точнее – только b т. к. коэффициент a в механике играет роль массы, которая всегда больше нуля):

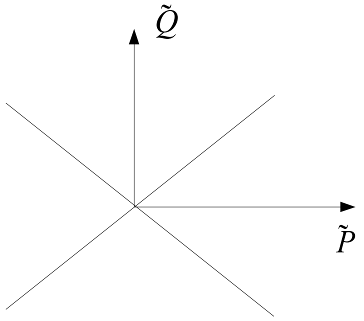
1) $a>0,\ b>0$. Тогда $E\geq E^*$ В этом случае реализуется так называемая эллиптическая особая точка.

2) *a>0, b<0.*

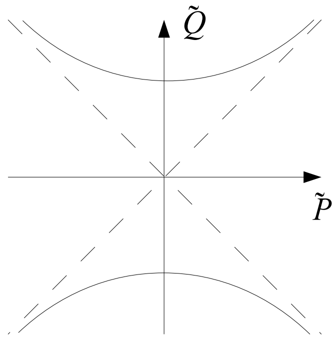
В этом случае возможны три варианта.



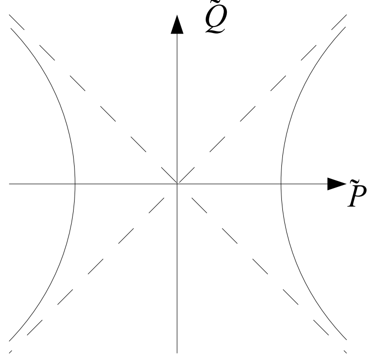
1. $E=E^*$ – крестовая особая точка: $|\tilde{P}|=\left|\frac{a}{m}\right|\cdot|\tilde{Q}|$



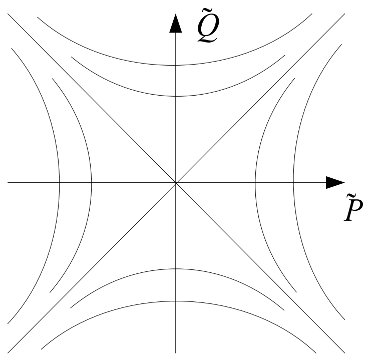
2. $E>E^*$ – гиперболическая особая точка



3. $E<E^*$ - гиперболическая особая точка



Итого,



Вопрос для экзамена: как движется система, если частица попала в центр креста на фазовой диаграмме?

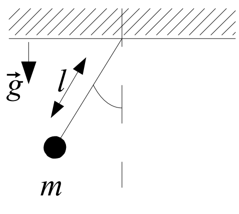
Таким образом, для гамильтоновых систем есть два вида особых точек; в остальных областях фазовые траектории представляют собой семейства параллельных прямых.

Кстати, *особых точек всегда не более, чем счетное множество*.

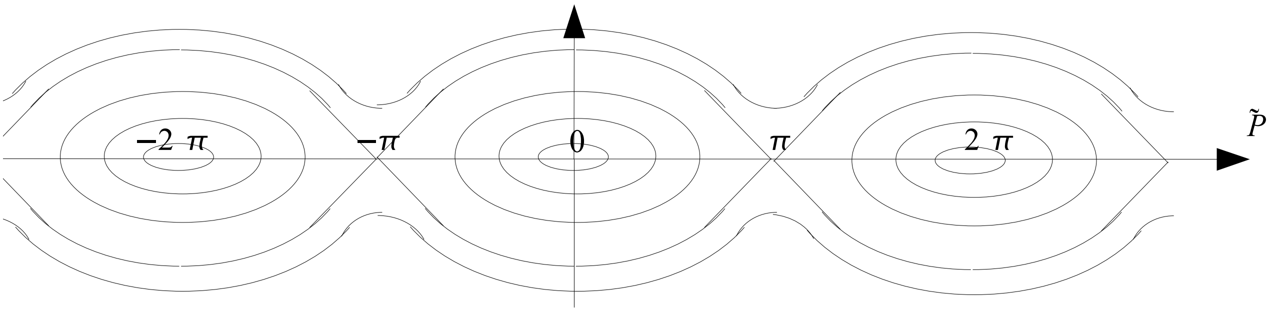
Пример: фазовый портрет физ. маятника.

$$H=p_\phi^2+m\,g\,l(1-\cos\phi)=E$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_\phi}=0, & p_\phi^*=0\\[2mm] \dfrac{\partial H}{\partial p_\phi}=0, & \phi^*=n\pi\,,\, n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$



$\tilde{Q}$

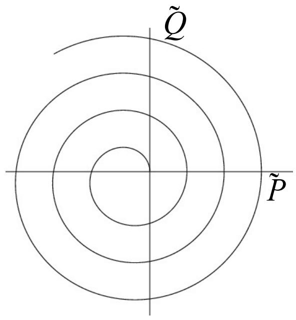


При четных n – эллиптические особые точки $\frac{p_\phi^2}{2\,ml}+mgl\frac{\phi^2}{2}=E$, при нечетных – крестовые $\frac{p_\phi^2}{2\,ml}+mgl\left(2-\frac{\Delta\phi^2}{2}\right)=E$

Определение сепаратрисы.

Сепаратриса – это линия, отделяющая замкнутые фазовые траектории от незамкнутых.

Еще пример. Рассмотрим произвольную динамическую систему $\begin{cases}\dot{p}=f(p,q,t)\neq-\dfrac{\partial H}{\partial q}\\ \dot{q}=g(p,q,t)\end{cases}$. Здесь может быть особая точка, называемая фокусом:



§6. Канонические преобразования.

Очевидно, можно произвольным образом преобразовывать координаты *(p, q, t)*:

$$\begin{cases}P=P(p,q,t)\\ Q=Q(p,q,t)\end{cases},\quad \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}\neq 0$$

Вопрос: когда это имеет смысл, т. е. когда существует $\tilde{H}(P,Q,t):\begin{cases}\dot{P}=-\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial Q}\\ \dot{Q}=-\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial P}\end{cases}$ ***?***

Очевидно, если такая функция Гамильтона существует, то P и Q – также канонические переменные; преобразования, не портящие функцию Гамильтона, называются каноническими преобразованиями.

Для поиска такого преобразования поступим стандартно: прибавим к соответствующей функции Лагранжа $\frac{dF}{dt}$ и выразим результат в механике Гамильтона.

$$S=\int L\,dt$$

$$dS=L\,dt$$

$$\tilde{L}=L-\frac{dF(q,t)}{dt}$$
$$\tilde{L}\,dt=L\,dt-dF$$
$$L=p\dot{q}-H$$
$$\tilde{L}=P\dot{Q}-\tilde{H}$$
$$P\,dQ-\tilde{H}\,dt=p\,dq-H\,dt-dF(q,Q,t)$$
$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} p=\frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q}=p(q,Q,t) \\ P=-\frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q}=P(q,Q,t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}P=P(q,p,t)\\ Q=Q(q,p,t)\end{cases} \\ \tilde{H}=H+\frac{\partial F}{\partial t}\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dot{P}=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}\\ \dot{Q}=\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}\end{cases}$$
$$-Q\,dP-\tilde{H}\,dt=p\,dq-H\,dt-d(\underbrace{F-PQ}_{F-\text{ещеодна производящая функция}})$$
$$F(q,p,t)$$
$$\begin{cases}Q=\frac{\partial F}{\partial p}\\ P=\frac{\partial F}{\partial q}\end{cases};\quad \tilde{H}=H+\frac{\partial F}{\partial t}$$
Еще производящие функции:
$$\Phi=PQ+F$$
$$G=\Phi-PQ+pq$$
$$\begin{cases}Q=\frac{\partial G}{\partial P}\\ q=-\frac{\partial G}{\partial p}\end{cases}$$
$$K=\Phi+pq$$
$$\begin{cases}q=-\frac{\partial K(p,Q,t)}{\partial p}\\ P=\frac{\partial K}{\partial Q}\end{cases}$$

ВОЗМОЖНО ПРОПУСК

Итак, пока что пришли к тому, что производящая функция F должна зависеть от одной старой координаты, одной новой и времени.

Посмотрим, какие ограничения нужно наложить для обратимости преобразования.

$$\begin{cases} p=p(q,Q)=\dfrac{\partial F}{\partial q} \\ P=P(q,Q)=-\dfrac{\partial F}{\partial Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=p(P,Q) \\ q=q(P,Q) \\ \tilde{H}=H+\dfrac{\partial F}{\partial t} \end{cases}$$

Возьмем несложную, но не решаемую аналитически задачу – ангармонический осциллятор:

$$H(p,q,t)=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2(t)q^2}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{p}=-m\omega(t)q \\ \dot{q}=\dfrac{p}{m} \end{cases} \Rightarrow \ddot{q}+\omega^2(t)q=0$$

Поищем хорошую (упрощающую дело) производящую функцию. Сначала попробуем абы как, а уж потом будет алгоритм.

$$F(q,Q,t)=\underbrace{\frac{1}{2}m\omega q^2}_{r\cdot p}\cdot ctg\,Q$$

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial F}{\partial q}=m\omega q\, ctg\,Q \\ P=-\dfrac{\partial F}{\partial Q}=\dfrac{1}{2}m\omega q^2\,\dfrac{q}{\sin^2 Q} \end{cases}$$

$$\tilde{H}=\frac{1}{2m}m^2\omega^2q^2ctg^2Q+\frac{m\omega^2q^2}{2}+\frac{1}{2}m\dot{\omega}(t)q^2ctgQ=\frac{m\omega^2q^2}{2\sin^2 Q}+\frac{1}{2}m\dot{\omega}q^2ctg\,Q$$

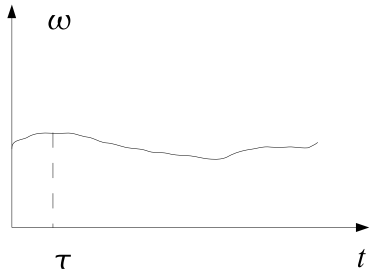
Учтем, что $\frac{1}{2}mq^2=\frac{P\sin^2 Q}{\omega}$:

$$\tilde{H}=\underbrace{\frac{m\omega^2q^2}{2\sin^2 Q}}_{\omega P}+P\frac{\dot{\omega}}{\omega}ctg\,Q\sin^2 Q$$

$$\tilde{H}=\omega P+\frac{P}{2}\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\sin(2Q)$$

$$\begin{cases} \dot{Q}=\omega(t)+\dfrac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\cdot\dfrac{1}{2}\sin(2Q) \\ \dot{P}=P\dfrac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\cos(2Q) \end{cases}$$

Как видно, в результате канонических преобразований уменьшился порядок уравнений.



τ – характерное время изменения частоты. Если частота уползает не сильно, то $\dot{\omega}\approx\frac{\omega}{\tau}$. Этой оценкой можно пользоваться для времен $T\gg\tau$.

$$\begin{cases} Q(t)=\int\omega(t)\,dt \\ \ln P=\int\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos\int\omega(t^*)\,dt^*\right)dt \end{cases}$$

Т. о. мы не решили задачу в общем виде (она не решаема изначально), но при некоторых частотах/временах...

Найдем инварианты канонических преобразований.

Теорема Лиувилля (об инвариантности фазового объема).

Если все точки некоего объема в *(p, q)* можно перенести в *(P, Q)*, то величина объема сохраняется:

$$\oint_{\xi} dq_1\,..dq_s\,dp_1\,..dp_s=\oint_{\xi'}\underbrace{\left|\frac{\partial(q_1\,..q_s,p_1\,..p_s)}{\partial(Q_1\,..Q_s,P_1\,..P_s)}\right|}_{\text{сейчас докажем, что якобиан равен единице}}dQ_1\,..dQ_s\,dP_1\,..dP_s=\oint_{\xi'}dQ_1\,..dQ_s\,dP_1\,..dP_s$$

Свойства якобианов.

1) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$

2) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,y)}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y$

3) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot 1=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,y)}{\partial(u,y)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,y)}\frac{\partial(u,y)}{\partial(u,v)}$

Возвращаемся к теореме Лиувилля.

$$\frac{\partial(q_1\,..q_s,p_1\,..p_s)}{\partial(Q_1\,..Q_s,P_1\,..P_s)}\cdot\frac{\partial(q_1\,..q_s,P_1\,..P_s)}{\partial(q_1\,..q_s,P_1\,..P_s)}=\frac{\partial(q_1\,..q_s)}{\partial(Q_1\,..Q_s)}\frac{\partial(p_1\,..p_s)}{\partial P_1\,..P_s}=\frac{\partial(p_1\,..p_s)}{\partial(P_1\,..P_s)}\text{¿}/\frac{\partial(Q_1\,..Q_s)}{\partial(q_1\,..q_s)}$$

Введем производящие функции $\Phi(p_1\,..p_s,P_1\,..P_s,t)$ и $F(q_1\,..q_s,Q_1\,..Q_s,t)$

Тогда:

$$\frac{\partial(p_1 \,..\, p_s)}{\partial(P_1 \,..\, P_s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial P_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_s}{\partial P_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial p_s}{\partial P_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_1 \partial q_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_2 \partial q_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_s \partial q_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_1 \partial q_s} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_s \partial q_s} \end{vmatrix}$$

и:

$$\frac{\partial(Q_1 \,..\, Q_s)}{\partial(q_1 \,..\, q_s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1 \partial P_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_2 \partial P_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_s \partial P_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1 \partial P_s} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_s \partial P_s} \end{vmatrix},$$

следовательно $\frac{\partial(p_1 \,..\, p_s)}{\partial(P_1 \,..\, P_s)} \equiv \frac{\partial(Q_1 \,..\, Q_s)}{\partial(q_1 \,..\, q_s)}$ – объем действительно сохраняется.

Это доказательство верно, только если оба определителя – не нули. Отсюда требование к производящей функции: $\left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\alpha \partial p_\beta} \neq 0\right.$

Пример: $\Phi(q, P) = q^2 + P^2$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q \partial P} = 0$$

$$\begin{cases} p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 2\,q \\ Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P} = 2\,P \end{cases}$$

***Некоторые вопросы для экзамена:* *при переходе* $(p, q) \to (P, Q)$**

1) ***Переходит ли незамкнутая траектория в замкнутую?***
2) ***Сохраняются ли особые точки?***
3) ***Может ли незамкнутая финитная траектория перейти в инфинитную?***

Инвариантность скобок Пуассона.

$$\{f(q, p, t), g(q, p, t)\}_{p,q} = \{f(Q, P, t), g(Q, P, t)\}_{Q,P}$$

Строго говоря, относительно канонических преобразований имеются только два инварианта – фазовый объем и скобки Пуассона.

§7. Применения канонических преобразований для интегрирования уравнений движения. Действие как функция координат и времени.

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi(q, p, t)}{\partial t}$$

Наипростейший случай – это когда $\tilde{H}=0$.

$$\begin{cases} \dot{P}=-\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}\equiv 0 \\ \dot{Q}\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow (P, Q)=const$$

Таким образом, мы перешли от *(p, q)* к новым постоянным координатам.

Положим $P=\dfrac{\partial \Phi}{\partial q}$, $Q=\dfrac{\partial \Phi}{\partial p}$.

Тогда уравнение в частных производных $0=H\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial p}, p, t\right)+\dfrac{\partial \Phi(q,p,t)}{\partial t}$ позволяет найти такую производящую функцию $\Phi(q,p,t)$.

Метод Гамильтона-Якоби.

Сначала – на примере. Возьмем гармонический осциллятор: $H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2 q^2}{2}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби для этого случая имеет вид: $\underbrace{\dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\partial \Phi_q}{\partial q}\right)^2+\dfrac{m\omega^2 q^2}{2}}_{C}+\underbrace{\dfrac{\partial \Phi_t}{\partial t}}_{-C}=0=\tilde{H}$

$\Phi(q,t)=\Phi_q(q)+\Phi_t(t)$ – переменные разделяются, только если блоки Φ_q и Φ_t равны константам. Положим $|C|=-P$.

Вполне очевидно, что $\begin{cases} \Phi_t(t)=P\cdot t \\ \Phi_q(q)=\int \sqrt{2m\left(-P-\dfrac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}dq, \quad P<0 \end{cases}$.

Т. о. $\Phi(q,P,t)=Pt+\int \sqrt{2m\left(-P-\dfrac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}dq$

Уравнение в частных производных разрешается с точностью до функции.

$Q=\dfrac{\partial \Phi}{\partial P}=const=t+\int \dfrac{-2m\,dq}{2\sqrt{2m\left(-P-\dfrac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}}$, отсюда можно выразить $q(t,P,Q)$. В этой задаче $P=-E$, $Q=t_0$, так что $t-t_0=\int \dfrac{dq}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E-\dfrac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}}$

Физический смысл производящей функции. Здесь $\Phi(q,P,t)$ равна действию как функции координат и времени: $S(t)=\int_{t_1}^{t} L(q(t),\dot{q}(t),t)dt$

$$S(t)=\int_{t_1}^{t}(p\dot{q}-H)dt$$

$$dS=p\,dq-H\,dt$$

$\dfrac{\partial S}{\partial q}=p$, $\dfrac{\partial S}{\partial t}=-H$, $\dfrac{dS}{dt}=L$ – сравнивая с Φ , видно, что $\Phi(q,P,t)\equiv S(q,t,P)$.

§8. Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби.

$$H=\frac{p^2}{2\,m}+U(\vec{r})\ ,\ \ \vec{r}=\{q_1,q_2,q_3\}$$

$$v^2=H_1^2\,\dot{q}_1^2\ +H_2^2\,\dot{q}_2^2\ +H_3^2\,\dot{q}_3^2$$

$$\vec{v}=H_1\,\dot{q}_1\,\vec{e}_1+H_2\,\dot{q}_2\,\vec{e}_2+H_3\,\dot{q}_3\,\vec{e}_3$$

$$L=\frac{\sum_i m\,H_i^2\dot{q}_i^2}{2}-U(q_1,q_2,q_3)$$

$$H=\frac{\sum_\alpha p_\alpha}{2\,m\,H_\alpha^2}+U(q_1,q_2,q_3)$$

$$\frac{1}{2\,m}\frac{\sum_\alpha 1}{H_\alpha^2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right)^2+U(q_1,q_2,q_3)+\frac{\partial S(q_1,q_2,q_3,t)}{\partial t}=0$$

Для сферических координат: $H_r=1$, $H_\Theta=r$, $H_\phi=r\sin\Theta$

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2\,m r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\Theta}\right)^2+\frac{1}{2\,m r^2\,\sin^2\Theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2+U(r,\Theta,\phi)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

Переход $H(p,q)\rightarrow\tilde{H}(I,\phi)$ позволяет быстро найти частоты колебаний системы.

Производящей функцией такого преобразования является “укороченное действие” S_0 :

$S_0=-S-Et$ (т. е. $S=-E\,t+S_0\,(E,q)$)

$$I(E)=\frac{1}{2\,\pi}\oint p\,d\,q$$

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial S_0}{\partial q}=p(q,I) \\ \phi=\dfrac{\partial S_0}{\partial I}=\phi(q,I) \end{cases}$$

Оказывается, $\{I,\phi\}$ можно ввести и для нестационарных систем (в этом случае $\dot{\phi}=\omega(t)\neq const$)

Это можно делать тогда, когда нестационарность системы медленна по сравнению с частотами системы, т. е. $H(p,q,t)\Leftrightarrow H(p,q,\lambda(t))$, где $\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda}\ll\omega$.

λ называется адиабатическим параметром.

Уравнения в переменных $\{T,\phi\}$ для адиабатических систем можно решить в виде разложения в ряд.

Алгоритм перехода для нестационарных систем на примере ангармонического осциллятора.

$$H(p,q)=\frac{p^2}{2\,m}+\frac{m\,\omega^2\,q^2}{2}\ ,\ \text{тогда}\ \ H(I)=\omega\,I\ ,\ \begin{cases}\dot{I}\neq 0\\ \dot{\phi}=\omega\end{cases}$$

Теперь положим $\omega(t)\neq const$.

$$H(p,q,t)=\frac{p^2}{2\,m}+\frac{m\,\omega^2\,(t)q^2}{2}$$

Построим укороченное действие $S_0(q, E)$:

1) Для стационарного случая

$$S_0(q, E)=\int p\,dq=\int_0^q \sqrt{2m\left(E-\frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}dq=\int_0^q \sqrt{2m\left(\omega I-\frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}dq=S_0(q, I)$$

Здесь нижний предел не играет роли – он выбирается произвольно (производящая функция определена с точностью до константы).

2) $S_0(q, I, t)=\int_0^q \sqrt{2m\left(I\omega(t)-\frac{m\omega^2(t)q^2}{2}\right)}dq$. На всякий случай: это не есть какое-либо действие какого-либо «живого» осциллятора. Это – просто некая производящая функция.

3) Применим полученную $S_0(q, I, t)$.

$$\tilde{H}=H+\frac{\partial S_0}{\partial t}$$

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial S_0}{\partial t} \\ \phi=\dfrac{\partial S_0}{\partial I} \end{cases}$$; в нашем примере $$\begin{cases} p=\sqrt{2m\left(I\omega(t)-\dfrac{m\omega^2(t)q^2}{2}\right)} \\ \phi=\displaystyle\int_0^q \omega(t)\sqrt{2m\left(I\omega(t)-\dfrac{m\omega^2(t)q^2}{2}\right)}dq=\arcsin\frac{q}{\sqrt{\dfrac{2I}{m\omega(t)}}} \end{cases}$$

4) Вычисляем $\tilde{H}$:

$$\tilde{H}=\frac{2m}{2m}\left(I\omega(t)-\frac{m\omega^2(t)q^2}{2}\right)+\frac{m\omega^2(t)q^2}{2}+\frac{\partial S_0}{\partial t}=I\omega(t)+\frac{\partial S_0}{\partial t}=$$

$$=I\omega(t)+\int_0^q \frac{2mI\dot{\omega}(t)-m^2q^2\cdot 2\,\omega(t)\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{2m\left(I\omega(t)-\frac{m\omega^2(t)q^2}{2}\right)}}dq$$

5) Далее надо взять интеграл и выразить q через ϕ .

$$\tilde{H}=I\omega(t)+\dot{\omega}(t)\int\limits_0^q \frac{mI-m^2\,\omega^2(t)q^2}{\sqrt{2\,mI\omega(t)-m^2\,\omega^2(t)q^2}}dq=$$

$$=I\omega(t)+\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega}(t)\int\limits_0^q\sqrt{2\,mI\omega(t)-m^2\,\omega^2(t)q^2}\,dq-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}mI\omega(t)\int\limits_0^q\frac{dq}{\sqrt{2\,mI\omega-m^2\,\omega^2(t)q^2}}=$$

$$=I\omega(t)+\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\int\limits_0^q\sqrt{2\,mI\omega(t)-m^2\,\omega^2(t)q^2}\,dq-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}I\underbrace{\int\limits_0^q\frac{dq}{\sqrt{\frac{2\,I}{m\omega(t)}-q^2}}}_{\phi}=$$

$$=I\omega(t)-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}+\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\int\limits_0^q\sqrt{2\,mI\omega(t)-m^2\,\omega^2(t)q^2}\,dq-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}I\phi=$$

$$=I\omega(t)+\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\int\limits_0^\phi\sqrt{\frac{2\,I}{m\omega(t)}-\frac{2\,I}{m\omega(t)}\sin^2\phi}\sqrt{\frac{2\,I}{m\omega(t)}}\cos\phi\,d\phi-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}I\phi=$$

$$=I\omega(t)+\frac{m\omega(t)\dot{\omega}(t)\cdot 2\,I}{\omega m\omega}\int\limits_0^\phi\cos^2\phi\,d\phi-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}I\phi=$$

$$=I\omega(t)+\frac{2\,I\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\sin 2\phi}{4}\right)-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}I\phi=$$

$$=I\omega(t)+\frac{I\dot{\omega}(t)}{2\,\omega(t)}\sin 2\phi$$

$$\tilde{H}(I,\phi,t)=\left(\omega(t)+\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\phi\right)$$

6) Напишем уравнение движения.

$$\begin{cases}\dot{I}=-\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial\phi}\\ \dot{\phi}=\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial I}\end{cases};\ \text{для нашей задачи}\ \begin{cases}\dot{I}=-\dfrac{I\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\cos 2\phi\\ \dot{\phi}=\omega(t)+\dfrac{\dot{\omega}(t)}{2\,\omega(t)}\sin 2\phi\end{cases}.$$

Если $\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda\omega}\ll 1$ $\left(\text{в этой задаче – если } \dfrac{\dot{\omega}}{\omega^2}\ll 1\right)$, то нелинейность результатов мала.

Усредним полученные уравнения по промежутку времени порядка периода колебаний соответствующей стационарной системы $\left(\dfrac{2\,\pi}{\omega\approx const}\right)$.

$\begin{cases}\dot{I}^{(0)}=0\\ \dot{\phi}^{(0)}=\omega(t)\end{cases}$ – здесь индекс означает не производную, а номер приближения.

$$\langle\dot{I}\rangle=\frac{1}{T}\int\limits_0^T(-1)\cdot\frac{I\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\cos\left(2\int\limits_0^t\omega(t')dt'\right)dt\approx\frac{1}{2\,\pi}\frac{I\dot{\omega}}{\omega}\int\limits_0^{2\pi}\cos(2\phi)d\phi=0$$

Таким образом, при медленном изменении I, за период действие не изменяется вообще. Такие величины называются *адиабатическими инвариантами.*

§9. Адиабатические инварианты.

Пусть система по каждой из s координат совершает периодическое (или квазипериодическое) движение.

$H\left(p_1 \,..\, p_s, q_1 \,..\, q_s, \lambda(t)\right) \quad \frac{\dot{\lambda}}{\omega_\alpha \lambda} \ll 1 \quad \forall \alpha$ (предполагаем, что если $\lambda = const$, то задача решаема аналитически).

$$S = -E\left(I_1 \,..\, I_s, \lambda(t)\right) t + S_0\left(q_1 \,..\, q_s, I_1 \,..\, I_s, \lambda(t)\right)$$

$$\tilde{H} = H\left(I_1 \,..\, I_s, \lambda(t)\right) + \dot{\lambda} \frac{\partial S_0\left(q_1 \,..\, q_s, I_1 \,..\, I_s, \lambda(t)\right)}{\partial \lambda}$$

$\dot{I}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi_\alpha}$; ϕ_α содержится только в S_0, т. к. в старом действии углов не было вообще.

$$\dot{I}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi_\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \phi_\alpha \partial \lambda} S_0\left(q_1(\phi_1 \,..\, \phi_s) .. q_s(\phi_1 \,..\, \phi_s), I_1 \,..\, I_s, \lambda(t)\right)$$

Вопрос из зала: почему $q_\alpha(\phi_1 \,..\, \phi_s)$, а не $q_\alpha(\phi_\alpha)$ (на самом деле на лекции было наоборот – Платонов написал $q_\alpha(\phi_\alpha)$)?

Ответ: было условие, что стационарная задача решается $\Rightarrow$ переменные в действии S_0 стационарной системы разделяются $\Rightarrow$ $S_0 = \sum_{i=1}^{s} S_{0\,i}(q_i, I_1 \,..\, I_s, \lambda)$.

$$\phi_\alpha = \frac{\partial S_0}{\partial I_\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \partial S_{0\,i}(q_i, I_1 \,..\, I_s, \lambda)}{\partial I_\alpha} \Rightarrow \phi_\alpha \textit{ зависит от } q_1 \,..\, q_s \forall \alpha \Rightarrow q_s \textit{ зависит от } \phi_1 \,..\, \phi_\alpha \forall s$$

$$\dot{I}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi_\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \phi_\alpha \partial \lambda} S_0\left(q_1(\phi_1 \,..\, \phi_s) .. q_s(\phi_1 \,..\, \phi_s), I_1 \,..\, I_s, \lambda\right)$$

$$\langle \dot{I}_\alpha \rangle_{\frac{2\pi}{\omega_\alpha}} \approx -\dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} S_0\left(q_1(\phi_1 \,..\, \phi_s) .. q_s(\phi_1 \,..\, \phi_s), I_1 \,..\, I_s, \lambda\right) \right\rangle$$

Так как $I_1 \,..\, I_s$ и λ меняются слабо, можно усреднять только по $q_\alpha(\phi_1 \,..\, \phi_s)$:

$$\langle \dot{I}_\alpha \rangle_{\frac{2\pi}{\omega_\alpha}} \approx -\dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} \sum_{n_1 \,..\, n_s = -\infty}^{+\infty} i n_\alpha \Lambda_{n_1 \,..\, n_s}(I_1 \,..\, I_s, \lambda) \cdot e^{i(n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2 + .. + n_s \phi_s)} \right\rangle = 0$$

Кстати, вместо усреднения по времени (t) имеет смысл использовать усреднение по углу (ωt):

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i n \phi} d\phi = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$ – в этом случае результат все равно будет равен нулю из-за множителя n_α

Для гармонического осциллятора:

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi} \oint p_\alpha d q_\alpha = \frac{E(t)}{\omega(t)} \approx const$$

Конфигурация магнитной ловушки.

Рассмотрим однородное магнитное поле:

$$\omega_Л = \frac{e H}{m c}$$

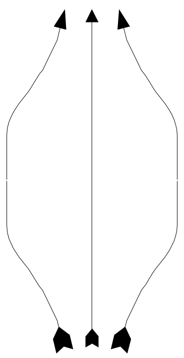
$$r_Л = \frac{v_\perp}{\omega_Л}$$

Будем понемногу $\left(\frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \ll \omega_Л\right)$ менять напряженность поля H:

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = \frac{1}{2\pi} m v_\perp \cdot r_Л \cdot 2\pi = \frac{m v_\perp^2}{\omega_Л}$$

$$E = \frac{m v_\parallel^2}{2} + \frac{m v_\perp^2}{2}$$

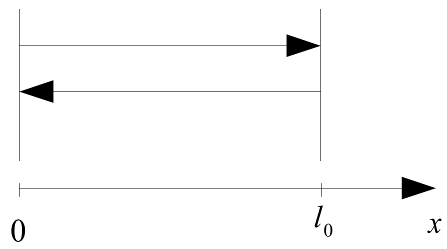
$$I_\phi = \frac{m v_\perp^2}{\omega_Л(t)}$$

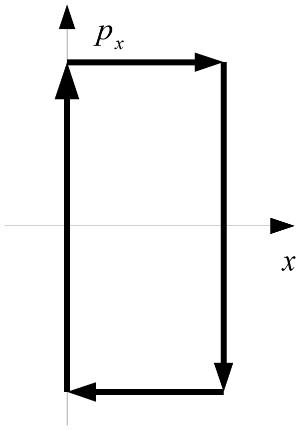


$$H\uparrow \Rightarrow \omega\uparrow \Rightarrow v_\perp\uparrow \Rightarrow v_\parallel\downarrow \Rightarrow \exists t_0 : v_\parallel = 0$$

Когда частица, накручиваясь по силовым линиям, доходит до определенного места, вся кинетическая энергия продольного движения переходит в энергию вращательного движения (общая энергия сохраняется, так как магнитное поле не совершает работы), и частица останавливается. После этого она, вероятнее всего, “отразится” и полетит в обратную сторону – до магнитной пробки с другой стороны ловушки, где ситуация повторится.

Рассмотрим частицу, упруго отражающуюся между двумя плоскостями:



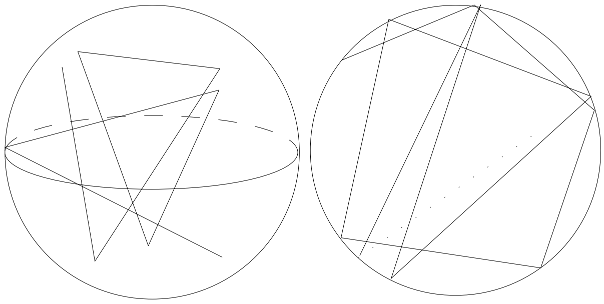


$$I_x = \frac{1}{2\pi} \oint p_x d x = \frac{p l}{\pi}$$

$$I_x = const \Rightarrow E(t) \propto \frac{1}{l^2(t)} .$$

Это явление называется адиабатическим нагревом.

В случае, когда движение происходит внутри окружности или шара:

 – в любом случае движение будет двумерным (в шаре тоже: $U(r)=\begin{cases}0, & r\le R\\ \infty, & r>R\end{cases}$)

$$I_\phi=\frac{1}{2\pi}\oint p_\phi\, d\phi=p_\phi$$

$$I_r=\frac{1}{2\pi}\oint p_\phi\, d\phi$$

Положим $\begin{cases}E=\dfrac{p_r^2}{2m}+\dfrac{p_\phi^2}{2mr^2}\\ r\in\left[r^*,R\right]\\ \xi=\dfrac{r}{r^*}\end{cases}$, где $r^*=\sqrt{\dfrac{I\phi^2}{2mE}}$ – значение, при котором корень под интегралом обращается в нуль. Тогда

$$I_r=\frac{1}{2\pi}\int_{r^*}^{R}\sqrt{2m\left(E-\frac{I\phi}{2mr^2}\right)}\,dr=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_1^{R\sqrt{2mE}/I\phi}\sqrt{2mE-\frac{I_\phi^2\cdot 2mE}{\xi^2\, I_\phi^2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_1^{R\sqrt{2mE}/I\phi}\sqrt{1-\frac{1}{\xi^2}}\,d\xi$$

– чтобы это было постоянной величиной, должно выполняться требование $E R^2=const\Rightarrow$ в исходной задаче $E(t)\,R^2(t)=const$.

Глава 4. Теория колебаний.

§1. Равновесие систем со многими степенями свободы. Понятие устойчивости равновесия.

Пусть потенциальная энергия системы $U(q_1 .. q_s)$ имеет локальный минимум в $(q_{10} .. q_{s0})$.

Разложим ее в точке минимума в ряд Тейлора (выберем систему координат так, чтобы $U(q_{10} .. q_{s0})=0$:

$$U(q_1 .. q_s)\Big|_{q=q_0}=\frac{1}{2\,!}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Bigg|_{q_\alpha=q_{\alpha 0},\ q_\beta=q_{\beta 0}}(q_\alpha-q_{\alpha 0})(q_\beta-q_{\beta 0})=$$

$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}K_{\alpha\beta}(q_\alpha-q_{\alpha 0})(q_\beta-q_{\beta 0})>0 \Rightarrow$ эта форма положительно определена (т. к. $K_{\alpha\beta}\stackrel{\text{def}}{=}K_{\beta\alpha}$)

Определение.

Равновесие называется устойчивым, если
$(\forall\epsilon>0):(\exists\delta_\epsilon>0):(|q_\alpha-q_{\alpha 0}|<\delta_\epsilon;|\dot q_\alpha|<\delta_\epsilon)$

Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости консервативных систем.

Если в некой точке потенциальная энергия консервативной системы имеет строгий изолированный минимум, то в этой точке достигается состояние устойчивого равновесия.

Доказательство этого факта выходит за рамки курса...

§2. Колебания систем со многими степенями свободы. Собственные частоты колебаний.

Рассмотрим консервативную систему вблизи минимума потенциальной энергии:

$$L=T-U$$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}(q_\alpha-q_{\alpha 0})(q_\beta-q_{\beta 0})$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}(q_1 .. q_s)\cdot\dot q_\alpha\dot q_\beta\approx\frac{1}{2sum}¿\alpha\beta\, m_{\alpha\beta}(q_{10} .. q_{s0})\cdot\dot q_\alpha\dot q_\beta$$

Любую матрицу можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей: $m_{\alpha\beta}=m^{(s)}_{\alpha\beta}+m^{(a)}_{\alpha\beta}$

$$\sum_{\alpha,\beta}m^{(a)}_{\alpha\beta}\dot q_\alpha\dot q_\beta=\sum_{\alpha,\beta}m^{(a)}_{\beta\alpha}\dot q_\beta\dot q_\alpha=-\sum_{\alpha,\beta}m^{(a)}_{\alpha\beta}\dot q_\beta\dot q_\alpha=-\sum_{\alpha,\beta}m^{(a)}_{\alpha\beta}\dot q_\alpha\dot q_\beta=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ антисимметричная часть матрицы масс в кинетическую энергию не войдет, так что будем считать, что $m_{\alpha\beta}=m_{\beta\alpha}$.

Функция Лагранжа вблизи строгого изолированного минимума потенциальной энергии:

$$L=T-U=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\left(m_{\alpha\beta}\dot q_\alpha\dot q_\beta-K_{\alpha\beta}(q_\alpha-q_{\alpha 0})(q_\beta-q_{\beta 0})\right)$$

Теперь удобно ввести координаты $x_\alpha=q_\alpha-q_{\alpha 0}$

Общий вид функции Лагранжа гармонической колебательной системы:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}(m_{\alpha\beta}\dot x_\alpha\dot x_\beta-K_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta)$$

Если продолжить разложение, появятся ангармонические члены. Пока что мы их не рассматриваем.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$-\sum_k (m_{ik}\ddot{x}_k+K_{ik}x_k)=0,\ \forall i$$

Если теперь представить координаты в виде $x_k(t)=\Re\left(a_k e^{i\lambda t}\right)$, то получим такую систему:

$$\sum_{k=1}^{s}\left(-m_{ik}\lambda^2+K_{ik}\right)a_k 0\ ,\quad i=1\ ..s$$

Для существования решения нужно, чтобы определитель системы равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} -m_{11}\lambda^2+K_{11} & \dots & -m_{1s}\lambda^2+K_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ -m_{s1}\lambda^2+K_{s1} & \dots & -m_{ss}\lambda^2+K_{ss} \end{vmatrix}=0$$

Докажем, что из этой системы мы получим только вещественные λ.

Положим $x_k=\Re\, a_k e^{i\lambda t}\sum_{i=1}^{s} a_i^*$, $a_i=a'_i+ja''_i$ – здесь буквой j обозначается мнимая единица.

$$\lambda^2=\frac{\sum_{i,k} K_{ik}a_i^* a_k}{\sum_{i,k} m_{ik}a_i^* a_k}=\frac{\sum_{i,k} K_{ik}(a'_i-ja''_i)(a'_i+ja''_i)}{\sum_{i,k} m_{ik}(a'_i-ja''_i)(a'_i+ja''_i)}$$

$$\Im\lambda^2=j\sum_{i,k}\underbrace{K_{ik}}_{\text{симм.}}\underbrace{(-a'_k a''_i+a''_k a'_i)}_{\text{антисимм.}}=0$$

Если хотя бы одна амплитуда отлична от нуля, то $\lambda_i^2>0$.

Будем брать по одной λ_i^2 и подставлять в систему.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1\,1} & a_{s-1\,2} & \dots & a_{s-1\,s} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}$$ – матрица амплитуд колебаний.

$$\lambda_1^2 \quad \lambda_2^2 \quad \dots \quad \lambda_s^2$$ – собственные частоты могут совпадать; число совпадающих частот называется кратностью вырождения колебательной системы.

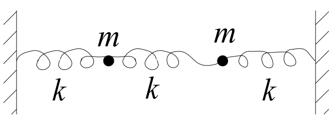
Так как определитель этой системы равен нулю, следовательно она линейно зависима $\Rightarrow$ в каждом столбце все a_{ik} можно выразить через произвольные a_{is}.

$$x_k=\Re\sum_{\beta=1}^{s} a_{k\beta}e^{i\lambda_\beta t}=\Re\sum_{\beta=1}^{s}|a_{k\beta}|e^{i\gamma_{k\beta}}e^{i\lambda_\beta t}=\sum_{\beta=1}^{s}|a_{k\beta}|\cos(\lambda_\beta t+\gamma_{k\beta})$$

s произвольных комплексных чисел равноценны $2s$ произвольных вещественных чисел, выражающихся через начальные условия.

В общем случае, x_k меняется во времени непериодическим образом, хотя и является суммой периодических движений с разными коэффициентами.

Пример:



$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2\ \dot{x}_2^2\right)-\frac{k x_1^2}{2}-\frac{k(x_2-x_1)^2}{2}-k x_2^2=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2\ \dot{x}_2^2\right)-k x_1^2-k x_2^2+k x_1 x_2$$

$$M=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix};\ K=\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1=-2kx_1+kx_2 \\ m\ddot{x}_2=-2kx_2+kx_1 \end{cases}$$

Решения будем искать в виде $x_i=a_i e^{i\lambda t}$.

$$\begin{cases} (-m\lambda^2+2k)a_1-k a_2=0 \\ -k a_1+(-m\lambda^2+2k)a_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -m\lambda^2+2k & -k \\ -k & -m\lambda^2+2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=0$$

Отсюда

$$\begin{cases} \lambda_1^2=\frac{k}{m},\ \ \omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \lambda_2^2=\frac{3k}{m},\ \ \omega_2=\sqrt{3}\,\omega_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1=a_{11}e^{i\lambda_1 t}+a_{12}e^{i\lambda_2 t} \\ \tilde{x}_2=a_{21}e^{i\lambda_1 t}+a_{22}e^{i\lambda_2 t} \end{cases}$$

Тильды в последнем выражении показывают, что для получения результата надо еще взять вещественную часть. Кстати, амплитуды как-то связаны между собой. Для прояснения этого обстоятельства поочередно подставим решения (λ_1,λ_2) в исходную систему.

Тогда получим, что $\begin{cases} a_{11}=a_{21} \\ a_{12}=-a_{22} \end{cases}$, т. е. общий вид решения этой задачи можно представить в виде

$$\begin{cases} x_1=|a_{21}|\cos(\lambda_1 t+\gamma_{21})-|a_{22}|\cos(\lambda_2 t+\gamma_{22}) \\ x_2=|a_{21}|\cos(\lambda_1 t+\gamma_{21})+|a_{22}|\cos(\lambda_2 t+\gamma_{22}) \end{cases}$$

Видно, что если $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ – иррациональное число, то суммарное колебание будет гармоническим, но не периодическим (конечно, если $a_{12}\neq 0$ и $a_{22}\neq 0$).

Поэтому хотелось бы ввести координаты, в которых было бы колебание только с одной частотой. Такие координаты действительно существуют, их можно построить как линейную комбинацию имеющихся координат. Эти новые координаты принято называть *главными*.

Свойства матрицы амплитуд.

$$\left\{\sum_{k=1}^{s}(-\lambda_n^2\ M_{ik}+K_{ik})a_{kn}=0\ ,\ i=1\ ..s\ \right|\cdot a_{il}\sum_{i=1}^{s}$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{s}(-\lambda_l^2\ M_{ik}+K_{ik})a_{kl}=0\ ,\ i=1\ ..s\ \right|\cdot a_{in}\sum_{i=1}^{s}$$

$$\sum_{k,\,i=1}^{s}(-\lambda_n^2\,m_{ik}a_{kn}a_{il}+K_{ik}a_{kn}a_{il})=0$$

$$-$$

$$\sum_{k,\,i=1}^{s}(-\lambda_l^2\,m_{ki}a_{il}a_{kn}+K_{ki}a_{il}a_{kn})=0$$

$$(\lambda_l^2-\lambda_n^2)\sum_{k,\,i=1}^{s}m_{ik}a_{kn}a_{il}=0$$

Пусть $l\neq n$

$$\sum_{k,\,i}m_{ik}a_{kn}a_{il}=0,\quad l\neq n$$

$$\sum_{k,\,i}m_{ik}a_{kn}\tilde{a}_{li}=0$$

$$\tilde{A}\,M\,A=\begin{pmatrix}c_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & c_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & c_s\end{pmatrix}$$

Выберем a_{ij} вещественными, такими, чтобы $\tilde{A}\,M\,A=E$.
Тогда

$$\sum_{k,\,i=1}^{s}\tilde{a}_{li}m_{ik}a_{kn}=\delta_{ln}$$

Вычислим теперь $\tilde{A}\,K\,A$.

$$\sum_{k}(-\lambda_n^2\,m_{ik}+K_{ik})a_{kn}=0$$

$$\sum K_{ik}a_{kn}=(K\,A)_{in}$$

$$\sum_{k}-\lambda_n^2\,m_{ik}a_{kn}=\lambda_n^2\,(M\,A)_{in}$$

Для удобства вычислений введем матрицу частот $\Lambda_{kl}=\delta_{kl}\lambda_l^2$:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_s^2\end{pmatrix}$$

$$-\lambda_l\delta_{nl}(M\,A)_{in}+(K\,A)_{in}=0\ \ \left|\tilde{A}\cdot\textit{(домножаем слева)}\right.$$

$$x\,\alpha=a\,\alpha\,e^{i\,\omega\,t}$$

$$(-\omega^2\,m_{\alpha\beta}+K_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}=0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix} = A$$
$-2s$ *констант выбираем произвольно*

$$\omega_1^2 \quad \dots \quad \omega_s^2$$

$$-\omega^2 (MA)_{\alpha k} + (KA)_{\alpha k} = 0 \quad \Big| a_{\alpha i} \cdot \qquad -\text{домножаем слева}$$

$$-\omega_k^2 (MA)_{\alpha k} a_{\alpha i} + (KA)_{\alpha k} a_{\alpha i} = 0$$

$$-\omega_k^2 \underbrace{(A^T MA)_{ik}}_{\delta_{ik}} + (\tilde{A} KA)_{ik} = 0$$

$$(\tilde{A} KA)_{ik} = \omega_k^2 \delta_{ik} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \omega_s^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tilde{A} KA = A \\ \tilde{A} MA = E \end{cases}$$

$$X = \sum_{k=1}^{s} a_{\alpha k} C_k e^{i \omega k t}$$

В общем случае матрица A не симметрична и не ортогональна.

Главные (нормальные) координаты многомерной колебательной системы.

Для многомерных колебательных систем вводят координаты $Q_\alpha(t)$ такие, чтобы колебание со многими частотами было периодическим.

Вводятся они так: $x_\alpha = \sum_k a_{\alpha k} Q_k$, соответственно $Q_\alpha = \sum_k a_{\alpha k}^{-1} x_k$.

$m_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + K_{\alpha\beta} x_\beta = 0 \iff L = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta - \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ – исходное уравнение движения. Попреобразовываем его.

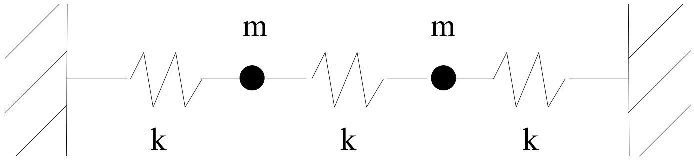
$$m_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \ddot{\Theta}_k + K_{\alpha\beta} a_{\alpha k} \Theta_k = 0 \iff L = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} a_{\alpha k} \dot{\Theta}_k a_{\beta i} \dot{\Theta}_i - \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} a_{ik} \Theta_i$$

домножим на $\sum_\alpha a_{\alpha n}$, получим:

$$\delta_{kn} \ddot{\Theta}_k + \omega_n^2 \delta_{kn} \Theta_k = 0$$
$$\ddot{\Theta} + \omega_n^2 \Theta_n = 0$$

Т. о. $L = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\Theta}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \omega_i^2 \Theta_i^2$

Пример перехода к главным координатам



Здесь $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$.

$$\begin{cases} x_1=a_{11}e^{i\omega_1 t}-a_{22}e^{i\omega_2 t}\\ x_2=a_{11}e^{i\omega_1 t}+a_{22}e^{i\omega_2 t}\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22}\\ a_{11} & a_{22}\end{pmatrix}=A$$

Построим такие a_{11} и a_{22}, чтобы $\begin{cases}\tilde{A}\,M\,A=E\\ \tilde{A}\,K\,\tilde{A}=\begin{pmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{pmatrix}\end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}\\ -a_{22} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22}\\ a_{11} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$m\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}\\ -a_{22} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22}\\ a_{11} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$a_{11}^2+a_{11}^2=\frac{1}{m}$$

$$-a_{11}a_{22}+a_{11}a_{22}=0$$

$$-a_{22}a_{11}+a_{22}a_{11}=0$$

$$a_{22}^2+a_{22}^2=\frac{1}{m}$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}}\\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{c_1}{\sqrt{2m}}\cos(\omega_1 t+\phi_1)-\frac{c_1}{\sqrt{2m}}\cos(\omega_2 t+\phi_2)\\ x_1=\frac{c_1}{\sqrt{2m}}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+\frac{c_1}{\sqrt{2m}}\cos(\omega_2 t+\phi_2)\end{cases}$$

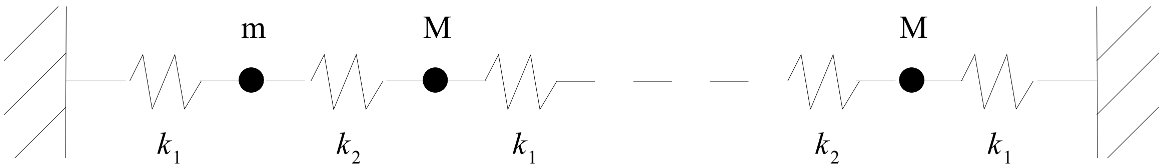
$$\begin{cases} \Theta_1\,(t)=\sqrt{\dfrac{m}{2}}(x_1+x_2)=c_1\,\cos(\omega_1\,t+\phi_1) \\ \Theta_2\,(t)=\sqrt{\dfrac{m}{2}}(-x_1+x_2)=c_2\cos(\omega_2\,t+\phi_2) \end{cases}$$

Функция Лагранжа в новых координатах:

$$L=\frac{\dot{\Theta}_1^{\ 2}}{2}-\frac{\omega_1^2\,\Theta_1^2}{2}+\frac{\dot{\Theta}_2^{\ 2}}{2}-\frac{\omega_1^2\,\Theta_2^2}{2}$$

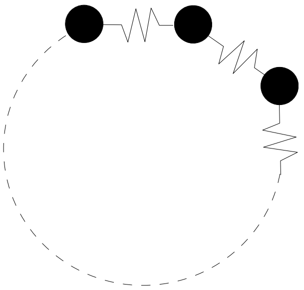
§3. Колебания линейных цепочек. Акустические и оптические ветви колебаний.

Рассмотрим "*N*" частиц двух сортов, соединенных пружинками чередующихся жесткостей.



Граничное условие этой системы: $x_0=x_{N+1}=0$

Еще один вариант цепочки (с граничным условием $x_i=x_{N+i}$):



Чем больше число частиц, тем меньше граничные условия влияют на решение задачи.

Обозначим смещение частиц с массой *m* за *x*, а частиц с массой *M* – за *y*.

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}_n=-k_1\,(x_n-y_n)-k_2\,(x_n-y_{n-1}) \\ M\,\ddot{y}_n=-k_1\,(y_n-x_n)-k_2\,(y_n-X_{n+1}) \end{cases},\quad n=2..N-1$$

Эти уравнения описывают движение всех частиц, кроме первой и последней. Для крайних атомов нужно записывать отдельные уравнения (граничные условия).

Мы рассмотрим простейший случай – когда цепочка замкнута в кольцо.

Сразу отметим, что раз мы ищем частоты, характеризующие всю систему, то в уравнениях движения будет фигурировать величина ω , а не ω_{kx},ω_{ky} .

Искать решение будем в виде волны (по счастливой случайности это действительно приведет к ответу в данной задаче).

$\begin{cases} x_n=a\,e^{iq\cdot n\,a_x-i\omega t} \\ y_n=b\,e^{iq\cdot n\,a_x-i\omega t} \end{cases}$. Было замечание, что надо было учесть различие в расстояниях от начала цепочки для атомов разных сортов, но путем несложных расчетов это различие загоняется в одну из констант *"a"* или *"b"*.

$$\begin{cases} -m\,\omega^2\,a=-k_1\,(a-b)-k_2\left(a-b\,e^{-iqa_x}\right) \\ -M\,\omega^2\,b=-k_1\,(b-a)-k_2\left(b-a\,e^{iqa_x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(-m\omega^2+k_1+k_2)+b\left(-k_1-k_2\,e^{-iqa_x}\right)=0\\ a\left(-k_1-k_2\,e^{iqa_x}\right)+b(-M\omega^2+k_1+k_2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2+k_1+k_2 & -k_1-k_2\,e^{-iqa_x}\\ -k_1-k_2\,e^{iqa_x} & -M\omega^2+k_1+k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Приравниваем нулю определитель системы.

$$\left(-m\omega^2+k_1+k_2\right)\left(-M\omega^2+k_1+k_2\right)-\left(k_1+k_2\,e^{-iqa_x}\right)\left(k_1+k_2\,e^{iqa_x}\right)=0$$

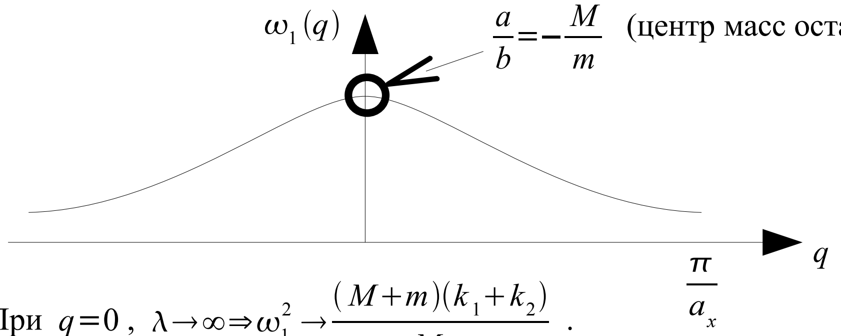
Отсюда $\omega_{1,2}^2=\dfrac{(M+m)(k_1+k_2)\pm\sqrt{(k_1+k_2)^2\,(M+m)^2-16\;Mm\,k_1\,k_2\,\sin^2\dfrac{qa_x}{2}}}{2\;Mm}$.

Так как частота здесь зависит от волнового вектора q, то это выражение можно назвать законом дисперсии.

$$\begin{cases} x_n=a\,e^{iqa_xn-i\omega t}\\ y_n=b\,e^{iqa_xn-i\omega t} \end{cases}$$

Система не чувствует изменения волнового вектора на $\dfrac{2\pi}{a_x}$. В самом деле, пусть $\tilde{q}=q+\dfrac{2\pi}{a_x}$. Тогда $e^{i\tilde{q}a_xn}=e^{iqa_xn}\underbrace{e^{2\pi in}}_{1}=e^{iqa_xn}$.

Оптические колебания:



(центр масс остается неподвижным)

При $q=0$, $\lambda\to\infty\Rightarrow\omega_1^2\to\dfrac{(M+m)(k_1+k_2)}{Mm}$.

При $q\to\dfrac{\pi}{a_x}$, $\omega_1^2=\dfrac{(M_m)(k_1+k_2)+\sqrt{(k_1+k_2)^2\,(M+m)^2-16\;Mm\,k_1\,k_2}}{2\;Mm}$

$$\frac{a}{b}=\frac{k_1+k_2\,e^{-iqa_x}}{k_1+k_2-m\omega^2}\;\underset{q\to 0}{\to}\;-\frac{M}{m}$$

Для заряженных частиц на оптической частоте происходит наиболее интенсивное поглощение/излучение энергии в виде э/м волн. В кристаллах она обычно приходится на инфракрасный диапазон, откуда и название.

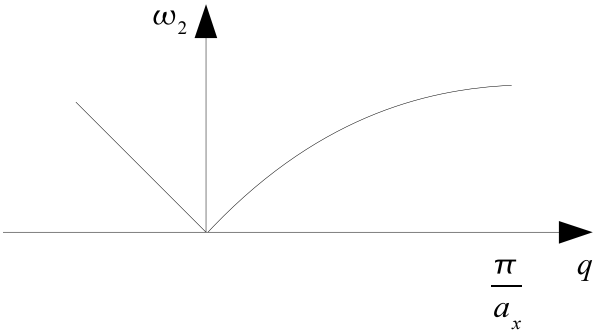
Положим $\begin{cases} \omega_0^2=\omega_1^2\big|_{q\to 0}\\ \gamma=\dfrac{16\;Mm\,k_1\,k_2}{(k_1+k_2)^2\,(M+m)^2} \end{cases}$.

Тогда $\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \gamma \sin^2 \frac{q a_x}{2}}\right)$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \gamma \sin^2 \frac{q a_x}{2}}\right) \approx \frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{\gamma}{2}\frac{q^2\, a_x^2}{4}\right)$$

$$\omega_2^2 \approx c_s \cdot q\,,\ c_s = \frac{a_x \omega_0}{2}\sqrt{\gamma}$$

Акустические колебания:



$$(-m\,\omega^2 + k_1 + k_2)a + (-k_1 - k_2\, e^{-i q a_x})b = 0$$

$$\frac{a}{b} \underset{q \to 0}{\to} 1$$

Теперь вспомним про граничные условия $x_n = x_{n+N}$, $y_n = y_{n+N}$.

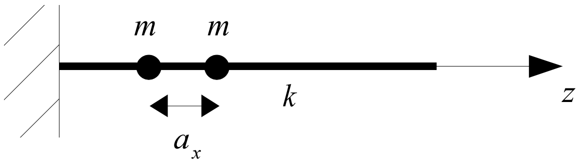
$$x_n = a\, e^{i q a_x n - i \omega t}$$

$$e^{i q a_x N} = 1$$

Таким образом, возможны не любые волновые векторы, а только те, которые отвечают ограничению $q a_x N = 2\,\pi Z$, $\underset{Z \in ¿}{-\frac{N}{2}, \frac{N}{2right}}$.

§4. Предельный переход к теории колебаний сплошной среды (колебания упругого стержня).

$N \to \infty$, $N a_x = l$, $a_x \to 0$



$m \ddot{x}_n = -k(x_n - x_{n-1}) - k(x_n - x_{n+1})$, $n = 2..N-1$ – А если $N \to \infty$, то $\infty - 1$???

Введем вместо дискретных $x_i(t)$ функцию $x(t, i \cdot a_x)$:

$$m \ddot{x}(t, n a_x) = -k\left(x(t, n a_x) - x(t, (n-1) a_x)\right) - k\left(x(t, n a_x) - x(t, (n+1) a_x)\right)$$

$a_x \to 0$, $n \to \infty$, $a_x n \to z$

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t, z) = -k\left(z_x \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} a_x^2\right) - k\left(-a_x \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{1}{2} a_x^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$\underbrace{\frac{m}{a_x}}_{\text{лин. плотность } \mu} \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial t^2} = \underbrace{k a_x}_{\text{модуль Юнга } E} \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2} - \frac{1}{c_s} \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2} = 0, \quad \textit{где скорость звука } c_s = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

Решением этого уравнения будет функция $x(z, t) = f_1(z - c_s t) - f_2(z + c_s t)$, где f_1 и f_2 – гладкие функции.

$$L = \sum_n \frac{m \dot{x}_n^2}{2} - \sum_n \frac{k}{2}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2 =$$

$$= \sum_n \left(\frac{n}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} x(t, n a_x) \right)^2 - \frac{k}{2} \left(a_x \frac{\partial x(t, n a_x)}{\partial z} \right)^2 \right) =$$

$$= \sum_n \left(a_x \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - a_x \frac{E}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right) =$$

$$= \sum_n a_x \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right) \to$$

$$\to \frac{1}{2} \int_0^l \left(\mu \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - E \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right) dz$$

Для непрерывных систем удобно использовать т. н. *плотность лагранжиана* L. В нашей задаче

$$\mathsf{L} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2$$

$$\mathsf{L} = \mathsf{L}\left(x(t, z), \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial z}, t, z \right)$$

Принцип наименьшего действия для непрерывных систем.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_1}^{V_2} L\left(x,\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial x}{\partial V},V,t\right)dV\,dt$$

Система, как всегда, ведет себя так, чтобы действие было наименьшим.

Для задачи со стержнем:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}\left(\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2-\frac{E}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right)dz\,dt\,.$$

$$\tilde{x}(t,z)=x(t,z)+\delta x(t,z)$$

$$\delta S=S[\tilde{x}]-S[x]=0$$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}\left(\frac{\partial ¿L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial ¿L}{\partial\frac{\partial x}{\partial t}}\delta\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial ¿L}{\partial\frac{\partial x}{\partial z}}\delta\frac{\partial x}{\partial z}\right)dz\,dt=$$

$$\partial\frac{¿¿}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial ¿L}{\partial\frac{\partial x}{\partial t}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial ¿L}{\partial\frac{\partial x}{\partial z}}$$

¿

¿

$dz\,dt=0$

¿

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l} ¿$$

$=¿$

Уравнение Лагранжа II рода для непрерывной системы:

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial x}{\partial z}}=0\,.$$

Глава 5. Нелинейные колебания

В общем случае нелинейные колебания описать невозможно. Мы здесь рассмотрим некоторые часто употребляемые частные случаи.

§1. Ангармонические колебания. Влияние ангармонизма на колебания линейных систем.

Будем учитывать более высокие члены функции Лагранжа, чем квадратичные.

$$L=\sum_{\alpha,\beta}\frac{m_{\alpha\beta}}{2}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta-\frac{K_{\alpha\beta}}{2}x_\alpha x_\beta\overset{(\gg)}{-}\frac{\gamma_{ikl}}{3}x_i x_k x_l+\frac{\eta_{ikl}}{2}x_i\dot{x}_k\dot{x}_l$$

$$L=\underbrace{\sum_\alpha\frac{\dot{Q}^2}{2}-\frac{\omega_2^2}{2}}_{L_0-\text{диагонализуемая часть}}\underbrace{-\frac{\tilde{\gamma}_{ikl}}{3}Q_iQ_kQ_l+\frac{\tilde{\eta}_{ikl}}{2}Q_iQ_kQ_l}_{+\delta L}$$

$$\ddot{Q}_\alpha+\omega_2^2Q_\alpha=f_\alpha\left(Q_i,\dot{Q}_i,\ddot{Q}_i\right)$$

$Q_\alpha(t)=Q_\alpha^{(0)}(t)+Q_\alpha^{(1)}(t)+Q_\alpha^{(2)}(t)+\ldots$ – здесь число в скобках – не номер производной, а уточнение до соответствующего приближения.

$Q_\alpha^{(0)}(t)=Q_{0\ \alpha}\cos(\omega_\alpha t+\delta_\alpha)$ – решение соответствующего однородного уравнения.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}=0$$

$$f_\alpha=\frac{\partial}{\partial Q_\alpha}\delta L-\frac{d}{dt}\frac{\partial\delta L}{\partial\dot{Q}_\alpha}$$

$Q_\alpha^{(1)}(t)\propto Y_{\alpha\beta i}Q_{0\ \beta}Q_{0\ i}\cdot\cos\left((\omega-\omega_i)t+\delta_\beta-\delta_i\right)$ – биение. Что характерно, амплитуда биений пропорциональна квадрату амплитуды основных колебаний.

Посчитаем $Q_\alpha^{(2)}(t)$.

$\ddot{Q}_\alpha^{(2)}+\omega_2^2Q_\alpha^{(3)}=\ldots+\propto\cos(\omega_\alpha t+\delta_\alpha)$ – здесь получится, что при резонансе амплитуда будет расти линейно по времени, чего быть не может по физическим причинам – в исходной задаче энергия сохраняется.

Рассмотрим этот вопрос подробнее (для простоты будем развлекаться только с одной координатой).

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}-\frac{\gamma}{3}x^3+\frac{\eta}{2}x\dot{x}^2$$

$$m\ddot{x}+kx=-\gamma x^2+\frac{\eta}{2}\dot{x}^2-\frac{d}{dt}\eta x\dot{x}$$

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=-\gamma x^2-\frac{\eta}{2}-\eta x\ddot{x}$$

$$x(t)=x^{(0)}(t)+x^{(1)}(t)+\ldots$$

$$x^{(0)}(t)=x_0\cos(\omega_0t+\alpha)$$

$$\ddot{x}^{(1)}+\omega_0^2\dot{x}^{(1)}+\ddot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\ldots=-\gamma\left(x^{(0)}+x^{(1)}+\ldots\right)^2-\frac{\eta}{2}\left(\dot{x}^{(0)}+\dot{x}^{(1)}+\ldots\right)^2-\eta\left(x^{(0)}+x^{(1)}+\ldots\right)\left(\ddot{x}^{(0)}+\ddot{x}^{(1)}+\ldots\right)$$

$$\ddot{x}^{(1)}+\omega_0^2\, x^{(1)}=\gamma\left(x^{(0)}\right)^2-\frac{\eta}{2}\left(\dot{x}^{(0)}\right)^2-\eta\left(x^{(0)}\ddot{x}^{(1)}+\ddot{x}^{(0)}x^{(1)}\right)$$

$$\ddot{x}^{(2)}+\omega_0^2\, x^{(2)}=-2\gamma\, x^{(0)}x^{(1)}-\eta\,\dot{x}^{(0)}\dot{x}^{(1)}-\eta\left(x^{(0)}\ddot{x}^{(1)}+\ddot{x}^{(0)}x^{(1)}\right)$$

$$\ddot{x}^{(3)}+\omega_0^2\, x^{(3)}=-\gamma\left(x^{(1)}\right)^2-2\,\gamma\, x^{(0)}x^{(2)}+...$$

$$\ddot{x}_1^{(1)}+\omega_0^2\, x^{(1)}=-\gamma\, x_0^2\cos^2(\omega_0\, t+\alpha)-\frac{\eta}{2}x_0^2\,\omega_0^2\sin^2(\omega_0\, t+\alpha)+\eta\, x_0^2\,\omega_0^2\cos^2(\omega_0\, t+\alpha)$$

$$\ddot{x}^{(1)}+\omega_0^2\, x^{(1)}=\frac{x_0^2}{2}\left(\eta\,\omega_0^2-\gamma-\frac{1}{2}\eta\,\omega_0^2\right)+\frac{x_0^2}{2}\left(\eta\,\omega_0^2-\gamma+\frac{1}{2}\eta\,\omega_0^2\right)\cos(2\,\omega_0\, t+2\,\alpha)$$

$$x^{(1)}(t)=\frac{x_0^2}{2\,\omega_0^2}\left(\frac{1}{2}\eta\,\omega_0^2-\gamma\right)-\frac{x_0^2}{3\cdot 2}\left(\frac{3}{2}\eta\,\omega_0^2-\gamma\right)\cos(2\,\omega_0\, t+2\,\alpha)$$

На самом деле, во втором приближении видно, что не только появляются биения, но происходит сдвиг основной частоты колебаний – так что резонанс не наступает.

$$x^{(2)}\propto\cos\left((\omega_0\overset{(\gg)}{+}\delta\,\omega)\,t+\alpha\right)$$

$\cos\left((\omega_0+\delta\,\omega)t+\alpha\right)\approx\cos(\omega_0\, t+\alpha)\overset{(\gg)}{-}\delta\,\omega\, t\sin(\omega_0\, t+\alpha)$ – это справедливо только для небольших времен (пока $x^{(2)},\, x^{(1)}\ll x^{(0)}$)

Перенормированная теория возмущений (работает для любых времен).

$$L=\frac{m\,\dot{x}^2}{2}-\frac{k\,x^2}{2}-\frac{\gamma}{3}x^3+\frac{\eta}{2}x\,\dot{x}^2$$

$$m\,\ddot{x}=-k\,x-\gamma\,x^2+\frac{\eta}{2}\dot{x}^2-\eta\frac{d}{d\,t}\left(x\,\dot{x}\right)$$

Отличается эта теория видом нулевого приближения: здесь мы будем также полагать некую зависимость основной частоты от приближения.

$$\omega=\omega_0+\omega_1+...$$

$$\ddot{x}=-\omega_0^2\,x-\gamma\,x^2-\frac{\eta}{2}\dot{x}^2-\eta\,x\,\ddot{x}$$

Домножим левую часть на $1=\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$

$$\ddot{x}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)=-\omega_0^2\,x-\gamma\,x^2-\frac{\eta}{2}\dot{x}^2-\eta\,x\,\ddot{x}$$

$$\underbrace{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}=-\omega_0^2\,x}_{x^{(0)}=x_0\cos(\omega_0\,t+\alpha)}\underbrace{-\gamma\,x^2-\frac{\eta}{2}\dot{x}^2-\eta\,x\,\ddot{x}-\underbrace{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}_{\text{мало}}\ddot{x}}_{\text{ангармоническая составляющая}}$$

Заметим, что $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\approx 1-2\,\frac{\omega_1}{\omega_0}$.

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(1)}=-\omega_0^2\,x^{(1)}\underbrace{-\gamma\left(x^{(0)}\right)^2-\frac{\eta}{2}\left(\dot{x}^{(0)}\right)^2-\eta\,x^{(0)}\ddot{x}^{(0)}}_{\text{колебания с удвоенной частотой}}\underbrace{-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}_{2\,\frac{\omega_1}{\omega_0}}\ddot{x}^{(0)}$$

А теперь заметим, что последний член – резонансный (т. е. при $\omega_1 \neq 0$ неограниченно растет со временем), так что $\omega_1 = 0$.

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\gamma x_0 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) - \frac{\eta}{2}\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \eta \omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\frac{\gamma x_0^2}{2} - \frac{\eta}{4}\omega_0^2 x_0^2 + \frac{\eta}{2}\omega_0^2 x_0^2 + \left(-\frac{\gamma x_0^2}{2} + \frac{\eta \omega_0^2 x_0^2}{4} + \frac{\eta \omega_0^2 x0^2}{2}\right)\cos(2\omega_0 t + 2\alpha)$$

$$x^{(1)}(t) = -\frac{\gamma x_0^2}{2\omega_0^2} + \frac{\eta x_0^2}{4} - \frac{1}{3\omega_0^2}\left(-\frac{\gamma x_0^2}{2} + \frac{3}{4}\eta \omega_0^2 x_0^2\right)\cos(2\omega_0 t + 2\alpha) =$$
$$= -\frac{\gamma x_0^2}{2\omega_0^2} + \frac{\eta x_0^2}{4} + \left(\frac{\gamma x_0}{6\omega_0^2} - \frac{\eta x_0^2}{4}\right)\cos(2\omega_0 t + 2\alpha)$$

Переходим ко второму порядку:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}^2 = -\omega_0^2 x^{(2)} - 2\gamma x^{(0)} x^{(1)} - \eta \dot{x}^{(0)} \dot{x}^{(1)} - \eta x^{(1)} \ddot{x}^{(0)} - \eta x^{(0)} \ddot{x}^{(1)} - 2\frac{\omega_2}{\omega_0}\ddot{x}^{(0)}$$

$$\left(1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 + \omega_1 + \omega_2)^2}\right)\left(\ddot{x}^{(0)} + \ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)}\right) \simeq 2\frac{\omega_2}{\omega_0}\ddot{x}^{(0)}$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\gamma x^{(0)} x^{(1)} - \eta x^{(1)} \ddot{x}^{(0)} - 2\frac{\omega_2}{\omega_0}\ddot{x}^{(0)} =$$
$$= -2\gamma\left(-\frac{\gamma x_0^3}{2\omega_0^2} + \frac{\eta x_0^3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma x_0^3}{6\omega_0^2} - \frac{\eta x_0^3}{4}\right)\right)\cos(\omega_0 t) + \ldots + 2\frac{\omega_2}{\omega_0}\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t)$$

Выберем частоту ω_2 такую, чтобы сумма всех членов, содержащих $\cos(\omega_0 t)$ (резонансные слагаемые) равнялась бы нулю.

$x^{(2)}(t) \propto \cos\left((\omega_0 + \omega_2)t\right)$

Из требования к ω_2 следует, что $x^{(2)}$ будет содержать только третью гармонику.

Аккуратные формулы:

Нулевое приближение: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$

Первое приближение: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) + x^{(1)}(t)$

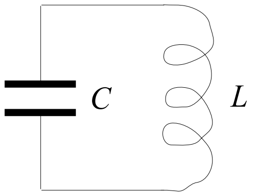
Второе приближение: $x(t) = x_0 \cos\left((\omega_0 + \omega_2)t + \alpha\right) + x^{(1)}(t) + \underbrace{x^{(2)}(t)}_{\propto a\cos(2\omega_0 t + 3\alpha)}, \ \omega_2 \propto \gamma^2 x_0^2$

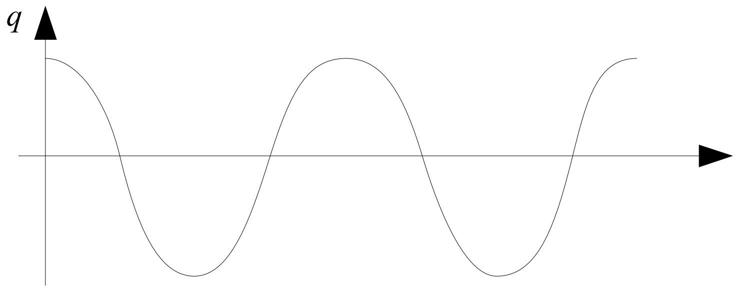
На каждом шаге мы можем найти поправку, аннулирующую все резонансы.

§2. Параметрический резонанс.

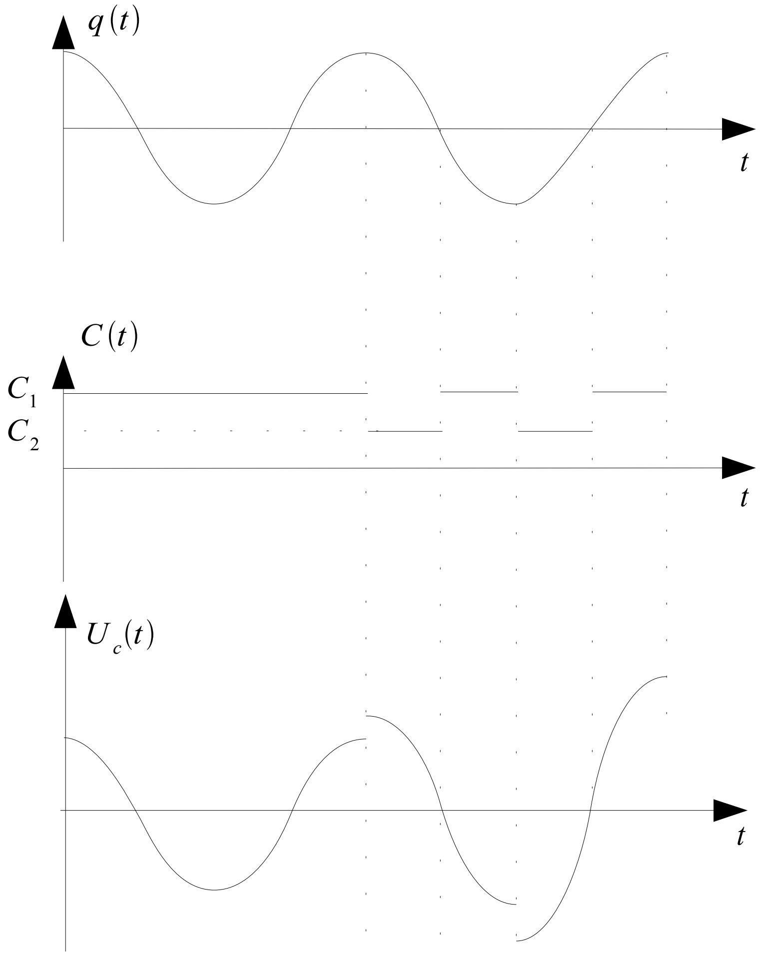
Параметрический резонанс есть резонанс под действием изменения параметров системы.

Будем рассматривать такую систему:





Поищем, как нужно изменять ёмкость со временем, чтобы амплитуда (напряжения на конденсаторе) нарастала.



t

В радиотехнике такая система называется параметрическим усилителем.

Частота накачки должна быть в два раза больше, чем частота сигнала.

$$E=\frac{q^2}{2\ C}+\frac{Li^2}{2}$$

$$\frac{q^2}{2\ C_1}\to\frac{q^2}{2\ C_2}$$

$$C_2<C_1\ \Rightarrow\ E_2>E_1$$

Каждый полупериод напряжение меняется в C_1/C_2 раз, однако чтобы этот усилитель не усиливал ненужные гармоники основной частоты, величина C_1/C_2 должна быть небольшой.

Посчитаем...

$$\ddot{x}+\omega^2\ (t)x=0$$

У нас $\ddot{x}+\omega_0^2\left(1\ +\epsilon\cos(2\ \omega t)\right)x=0$, $\omega\approx\omega_0$, трение учитывать не будем.

$$x(t)=a(t)\cos(\omega t)+b(t)\sin(\omega t)$$

Будем считать, что $\frac{\dot{a}}{a}\sim\frac{\dot{b}}{b}\ll\omega$

Воспользуемся тем, что можно назвать “методом медленно меняющихся амплитуд”, т. е. пренебрежем $\ddot{a}$ и $\ddot{b}$.

$$-\omega a\cos(\omega t)-2\ \dot{a}\,\omega\sin(\omega t)+2\ \dot{b}\,\omega\cos(\omega t)+\omega_0^2\left(1\ +\epsilon\cos(2\ \omega t)\right)\cdot\left(a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)\right)=0$$

Из этого уравнения “вручную” выбросим колебания на утроенной основной частоте. Проверить, можно ли так сделать, мы сможем лишь получив ответ.

$$-\omega^2 a\cos(\omega t)-2\dot{a}\omega\sin(\omega t)+\omega^2 b\sin(\omega t)+2\dot{b}\omega\cos(\omega t)+$$
$$+\omega_0^2\left(a\cos(\omega t)+\frac{\epsilon a}{2}\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)-\frac{\epsilon b}{2}\sin(\omega t)\right)=0$$

$$\left(-\omega^2 a+2\dot{b}\omega+\omega_0^2 a+\frac{\omega_0^2\epsilon a}{2}\right)\cos(\omega t)+\left(-2\dot{a}\omega-\omega^2 b+b\omega_0^2-\frac{\omega_0^2 b\epsilon}{2}\right)\sin(\omega t)=0$$

$$\begin{cases}-\omega^2 a+2\dot{b}\omega+a\omega_0^2\left(1+\dfrac{\epsilon}{2}\right)=0\\ -\omega^2 b+2\dot{a}\omega+b\omega_0^2\left(1-\dfrac{\epsilon}{2}\right)=0\end{cases}$$

Решение ищем в виде $\begin{cases}a(t)=a_0 e^{(st)}\\ b(t)=b_0 e^{(st)}\end{cases}$.

$$\begin{pmatrix}-\omega^2+\omega_0^2\left(1+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & 2\omega\cdot s\\ -2\omega\cdot s & -\omega^2+\omega_0^2\left(1-\dfrac{\epsilon}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0phantom\cdot\\ 0phantom\cdot\end{pmatrix}$$

Приравняем нулю определитель:

$$\left(-\omega^2+\omega_0^2+\frac{\omega_0^2}{2}\right)\left(-\omega^2+\omega_0^2-\frac{\omega_0^2\epsilon}{2}\right)+4\omega s^2=0$$

Отсюда $s=\dfrac{1}{2\omega}\sqrt{\dfrac{\omega_0^4\epsilon^2}{4}-\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}$.

$$\underbrace{\left|\omega^2-\omega_0^2\right|}_{2\omega_0^2(\omega-\omega_0)}\le\frac{\omega_0^2\epsilon}{2}$$

s может быть либо мнимым, либо вещественным; усиление достигается только в последнем случае.

$\omega_0-\dfrac{\epsilon\omega_0}{4}<\omega<\omega_0+\dfrac{\epsilon\omega_0}{4}$ – полоса захвата усилителя.

Что характерно, усиление здесь экспоненциально, а не линейно.

$$s_{max}=s\big|_{\omega=\omega_0}\approx\frac{\epsilon\omega_0}{4}$$

Кстати, $a_0=-b_0$

$$\begin{cases}a(t)=a_0 e^{s_{max}t}\\ b(t)=-a_0 e^{s_{max}t}\end{cases}$$

a_0 определяется из начальных условий. Для возникновения параметрического резонанса требуется, чтобы $a_0\ne0$.

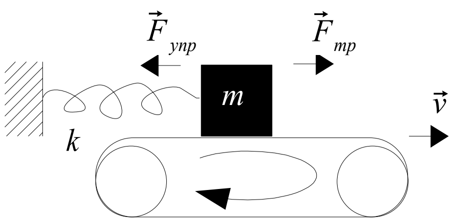
Проверим, могли ли мы пренебречь при расчетах третьей гармоникой.

$$-\omega^2 a\cos(\omega t)-2\omega\dot{a}\sin(\omega t)-\omega^2 b\sin(\omega t)+2\omega\dot{b}\cos(\omega t)=$$
$$=-\omega_0^2 a\cos(\omega t)-\omega_0^2 b\sin(\omega t)-\omega_0^2\frac{\epsilon a}{2}\left(\cos(\omega t)+\cos(3\omega t)\right)-\omega_0^2\frac{\epsilon b}{2}\left(\sin(3\omega t)-\sin(\omega t)\right)$$

$x(t)=a(t)\cos(\omega t)+b(t)\sin(\omega t)+c(t)\cos(3\omega t)+d(t)\sin(3\ \omega t)$

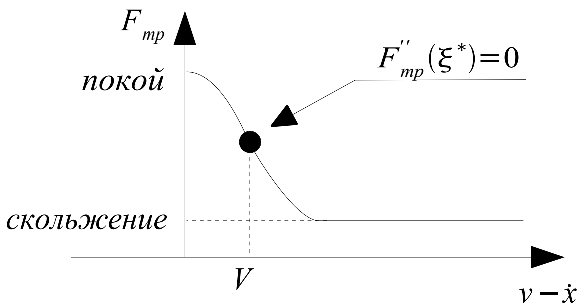
Видно, что если учитывать третью гармонику, то $3\ \omega t$ появится в левой части, в правой придется отбрасывать $5\ \omega t$. Тогда получили бы $c(t)=c_0\ e^{s_1 t}$, где $s_1<s_{max}$ $\Rightarrow$ высшие гармоники можно отбросить.

§3. Автоколебания. Метод Ван дер Поля.



Это - не танк со штопором.
Это - грузик на транспортере с пружинкой

$m\ddot{x}=-k\,x+\vec{F}_{тр}(\dot{x})$



Выберем такую рабочую точку V, чтобы $F''_{тр}(V)=0$ – как мы увидим, только при этом действительно возникнут незатухающие колебания.

$\dot{x}\le v$

$F_{тр}$ можно разложить в ряд по $\dfrac{\dot{x}}{v}$, пользуясь некоторыми известными вещами:

$m\ddot{x}=-k\,x+F_{тр}(v-\dot{x})$

$$m\ddot{x}+k\,x=F_{тр}(V)-\underbrace{\dot{x}\,F'_{тр}}_{\propto kx}+\underbrace{\frac{\dot{x}^3}{2}F''_{тр}}_{0}-\frac{\dot{x}^3}{6}F'''_{тр}$$

Запишем это уравнение в безразмерном виде (чтобы можно было применять его не только в механике, но и иных прикладных задачах)...

$$\ddot{x}+\omega_0^2\ x=\frac{F_{тр}(V)}{m}-\dot{x}\underbrace{\frac{F'}{m}}_{\alpha}-\frac{1}{3}\dot{x}\underbrace{\frac{F'''}{2\ m}}_{\beta}$$

Перейдем от времени t к числу пройденных периодов τ : $\tau=\omega\cdot t$

$$x=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\xi\,\omega_0$$

На этом месте К. Ю. сказал: “Когда я год назад доказывал это предыдущему потоку, никаких проблем не возникало...”. И добавил, что может спросить на экзамене, как перейти к безразмерному уравнению движения.

Пока что оставим всё в таком виде (с коэффициентами размерности α и β):

$$\ddot{\xi}+\xi=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{F_{mp}}{m\omega_0}-\alpha\omega_0\left(\dot{\xi}+\frac{\dot{\xi}^3}{3}\right)$$

Развлекаемся дальше...

$$\xi=y+\sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}}\frac{F_{mp}}{m\omega_0}$$

$$\ddot{y}+y=\frac{|\alpha|}{\omega_0}\dot{y}-\frac{|\alpha|}{\omega_0}\frac{\dot{y}^3}{3}$$

Пусть $\epsilon=\frac{|\alpha|}{\omega_0}$

Тогда $\ddot{y}+y=\epsilon\dot{y}-\frac{\epsilon}{3}\dot{y}^3$

Метод Ван дер Поля:

1) Запишем уравнение второго порядка в виде системы уравнений первого порядка.

$$\begin{cases}\phi=\dot{y}\\ \dot{\phi}=-y+\epsilon\phi-\frac{\epsilon}{3}\phi^3\end{cases}$$

Если $\epsilon=0$, то $\dot{\phi}=-y$, $\dot{y}=\phi$ – гармонические колебания.

2) Метод В. Поля заключается в том, что при $\epsilon\neq 0$ ищем решение в том же виде, но с амплитудой и фазой зависящими от времени.

$$\begin{cases}y=A(\tau)\cos\left(\tau+\Theta(\tau)\right)\\ \phi=-A(\tau)\sin\left(\tau+\Theta(\tau)\right)\end{cases}$$

Это, однако, приближенный метод, работающий только если $A(\tau)$ и $\Theta(\tau)$ – медленные функции.

$$\begin{cases}-\dot{A}\sin-A\cos\cdot(1+\dot{\Theta})=-A\cos-\epsilon A\sin+\frac{\epsilon}{3}A^3\sin^3\\ \dot{A}\cos-A\sin\cdot(1+\dot{\Theta})=-A\sin\end{cases}$$

Найдем $\dot{A}$ и $\dot{\Theta}$ ...

$$\begin{cases}\dot{A}=\epsilon A\sin^2-\frac{\epsilon}{3}A^3\sin^4\\ \dot{\Theta}=\epsilon\sin\cos-\frac{\epsilon}{3}A^2\sin^3\cos\end{cases}$$

... и усредним уравнения по одному периоду, полагая, что $\dot{A}$ и $\dot{\Theta}$ медленны.

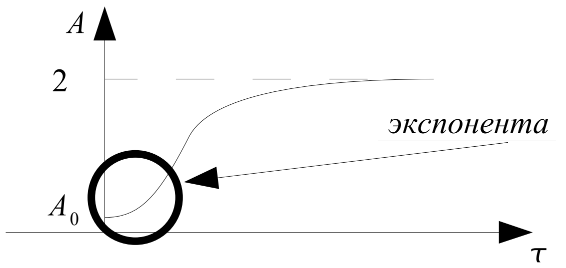
$$\begin{cases}\langle\dot{\Theta}\rangle=0\\ \langle\dot{A}\rangle=\frac{1}{2}\epsilon A-\frac{1}{8}\epsilon A^3\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta \approx \Theta_0 \\ \dot{A} = \dfrac{\epsilon}{2} A \left(1 - \dfrac{A^2}{4}\right) \end{cases}$$

$$\frac{dA}{A\left(1 - \dfrac{A^2}{4}\right)} = \frac{\epsilon}{2} d\tau$$

$$\frac{1}{A\left(1 - \dfrac{a^2}{4}\right)} = \frac{a}{A} + \frac{b}{1 - A/2} + \frac{c}{1 + A/2}$$; если A мало, то членом $A^2/4$ (коэффициенты b и c) можно пренебречь.

$$A(\tau) = \frac{A_0 e^{\frac{\epsilon}{2}\tau}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} A_0^2 \left(e^{\epsilon\tau} - 1\right)}}$$ – это решение справедливо только если $\epsilon = \dfrac{|\alpha|}{\omega_0} \ll 1$



Глава 6. Движение твердого тела.

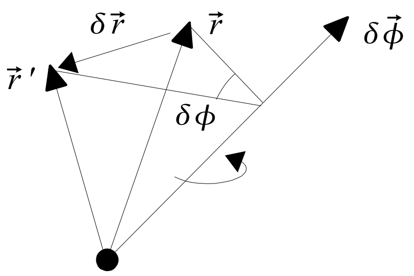
Определение. Твердое тело – это такая механическая система, расстояния между точками которой остаются неизменными в данной задаче.

§1. Кинематика твердого тела. Угловая скорость.

Твердое тело имеет максимум шесть степеней свободы – три поступательных и три вращательных.

Соответственно, его положение характеризуется максимум шестью координатами. Обычно в качестве них выбирают три координаты центра масс системы и три угла, определяющие поворот системы относительно "неподвижной" системы координат. Как правило, удобно выбирать определенный набор углов, называемых *углами Эйлера* (см. ниже).

Движение твердого тела можно условно разделить на поступательное и вращательное. Для вращения тела вводится понятие вектора угла поворота $\delta\vec{\phi}$: его направление совпадает с направлением оси вращения, а модуль равен величине угла поворота $\delta\phi$.



$$\vec{r}\,'=\vec{r}+[\delta\vec{\phi}\times\vec{r}]$$
$$\delta\vec{r}=[\delta\vec{\phi}\times\vec{r}]$$
$$\vec{v}_a=\underbrace{\vec{v}}_{\frac{d\vec{R}}{dt}}+\vec{v}_a^{\,отн}=\vec{V}+\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}_a\right)$$

Кинетическая энергия:

$$T=\sum_a T_a=\sum_a\frac{m_a v_a^2}{2}=\frac{V^2}{2}\underbrace{\sum_a m_a}_{\mu}+\vec{V}\left[\vec{\Omega}\times\sum_a m_a\vec{r}_a\right]+\underbrace{\sum_a\frac{m_a}{2}\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}_a\right]^2}_{кин.\ энергия\ вращения}$$

$$\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}_a\right]=\left(\vec{\Omega}^2\,\vec{r}_a^{\,2}-\left(\Omega\,\vec{r}_a\right)\right)$$

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\sum_{\alpha,\beta}\frac{\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2}\underbrace{\sum_a m_a\left(\vec{r}_a^{\,2}\,\delta_{\alpha\beta}-r_{a\alpha}r_{a\beta}\right)}_{тензор\ момента\ инерции\ I_{\alpha\beta}}$$

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\sum_{\alpha\beta}\frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2}$$

Свойства тензора инерции.

1) $I_{\alpha\beta}=I_{\beta\alpha}$
2) $T_{вращ}\geq 0\ \Rightarrow$ матрица *I* положительно определена $\Leftrightarrow$ все миноры *I* положительны.
3) Существует такая система координат (всегда сопутствующая), в которой *I* является диагональной матрицей. Такая система координат называется главной.

$I=\begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$ – I_{11}, I_{22} и I_{33} называются главными моментами инерции системы; они всегда положительны и для них справедливо неравенство $I_{aa}+I_{bb}\geq I_{cc}$

Тело, для которого $I_{11}=I_{22}=I_{33}$ называется *шаровым волчком* (при этом оно может не быть шаром).
Тело, для которого $I_{11}=I_{22}\neq I_{33}$ называется *симметрическим волчком*.
Наконец, если все три момента различны $\left(I_{11}\neq I_{22}\neq I_{33}\neq I_{11}\right)$, то тело называется *асимметрическим волчком*.

Момент импульса твердого тела.

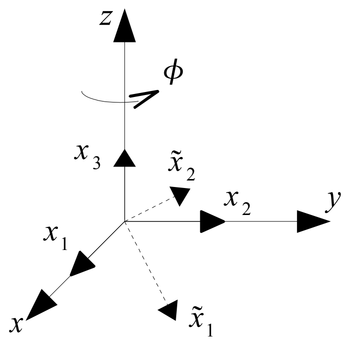
$$\begin{aligned}\vec{M}&=\sum_a m_a\left[\vec{\rho}_a\times\vec{v}_a\right]=\\ &=\sum_a m_a\left[\left(\vec{R}+\vec{r}_a\right)\times\left(\vec{V}+\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}_a\right]\right)\right]=\\ &=\mu\left[\vec{R}\times\vec{V}\right]+\sum_a m_a\left[\vec{r}_a\times\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}_a\right]\right]=\\ &=\mu\left[\vec{R}\times\vec{V}\right]+\sum_a m_a\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r}_a^{\,2}-\vec{r}_a\left(\vec{\Omega}\vec{r}_a\right)\right)\end{aligned}$$

Таким образом, $M_\alpha=\mu\left[\vec{R}\times\vec{V}\right]_\alpha+\sum_\beta I_{\alpha\beta}\Omega_\beta$

§2. Углы Эйлера. Связь угловой скорости с производными по времени углов Эйлера.

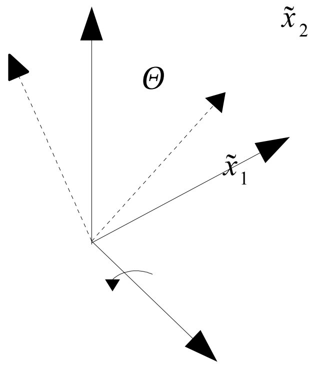
Построение углов Эйлера.

Угол прецессии Φ : повернем координатные оси вокруг оси *z*.



Угол нутации Θ : повернем теперь всё вокруг $\tilde{x}_1$.

$\tilde{\tilde{x}}_3$ x_3 $\tilde{\tilde{x}}_2$



Третий угол – угол собственного вращения ψ описывается вокруг оси $\tilde{\tilde{x}}_3$.

Диапазоны углов Эйлера: $\phi\in[0\,,\ 2\ \pi)$, $\Theta\in[0,\ \pi)$, $\psi\in[0\,,2\ \pi)$

Между прочим...

$$\begin{cases}\dot{\vec{\phi}}\uparrow\uparrow z\\ \dot{\vec{\Theta}}\uparrow\uparrow \tilde{x}_1\\ \dot{\vec{\psi}}\uparrow\uparrow \tilde{\tilde{x}}_3\end{cases}$$

$$\vec{\Omega}=\dot{\vec{\phi}}+\dot{\vec{\Theta}}+\dot{\vec{\psi}}$$

$$\begin{cases}\Omega_x=\dot{\Theta}\cos\phi+\dot{\psi}\sin\Theta\sin\phi\\ \Omega_y=\dot{\Theta}\sin\phi-\dot{\psi}\sin\Theta\cos\phi\\ \Omega_z=\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\Theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Omega_1=\dot{\Theta}\cos\psi+\dot{\phi}\sin\Theta\sin\psi\\ \Omega_2=-\dot{\Theta}\sin\psi+\dot{\phi}\sin\Theta\cos\psi\\ \Omega_3=\dot{\psi}\end{cases}$$

Расписанная функция Лагранжа:

$$L=T-U=$$
$$=\frac{\mu}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{2}I_1\left(\dot{\Theta}\cos\psi+\dot{\phi}\sin\Theta\sin\psi\right)^2+\frac{1}{2}I_2\left(-\dot{\Theta}\sin\psi+\dot{\phi}\sin\Theta\cos\psi\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi}+\phi\cos\Theta\right)^2-U(x\,,y\,,z\,,\Theta\,,\phi\,,\psi)$$

Положим $U=0$. Тогда $L=T=const$. Можно заметить также, что углы ϕ и ψ содержатся только в виде своих производных $\Rightarrow$ это – циклические переменные.

$$p_\phi=I_1\dot{\phi}\sin^2\Theta+I_3\left(\dot{\phi}+\dot{\phi}\cos\Theta\right)\cos\Theta$$

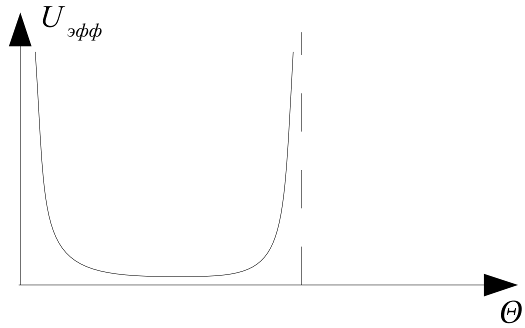
$$p_\psi=I_3\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\Theta\right)$$

$$E=\frac{I_{11}}{2}\left(\dot{\Theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\Theta\right)+I_{33}\left(\psi+\dot{\phi}\cos\Theta\right)^2$$

$$\dot{\phi}=\frac{p_\phi-p_\psi\cos\Theta}{I_{11}\sin^2\Theta}$$

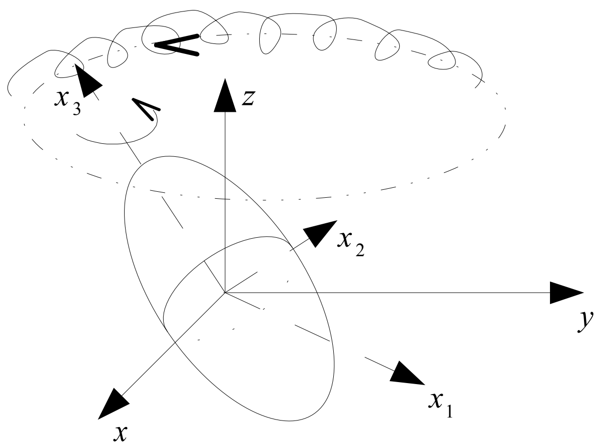
$$t=\int \frac{d\Theta}{\sqrt{\frac{2}{I_{11}}\left(E-U_{эфф}(\Theta)\right)}}$$

$$E=\frac{I_{11}\dot{\Theta}^2}{2}+\underbrace{\frac{\left(p_\phi-p_\psi\cos\Theta\right)^2}{2\ I_{22}\sin^2\Theta}+\frac{p_\psi^2}{2\ I_{33}}}_{U_{эфф}}$$



На экзамене может потребоваться найти $\Theta(t)$, $\phi(t)$ и $\psi(t)$.

Движение симметрического волчка:



Можно подобрать такие E, p_ϕ и p_ψ, чтобы движение было более простым, а именно:

1. $p_\phi=p_\psi$
2. $p_\phi=p_\psi=0$
3. $p_\psi\neq 0$, $p_\psi=0$

Замечание:

В неподвижной системе координат $M_\alpha=I_{\alpha\beta}\Omega_\beta(t)=const$, в системе же координат, связанной с волчком, $M_\alpha(t)=I_{\alpha\alpha}\Omega_\alpha(t)\neq const$.

§3. Уравнения Эйлера.

$$\begin{cases}\mu\dfrac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}\\ \dfrac{d\vec{M}}{dt}=\vec{K}\end{cases}$$

Учтем, что $\dfrac{d\vec{A}_{лаб}}{dt}=\dfrac{d\vec{A}_{подв}}{dt}+\left[\vec{\Omega}\times\vec{A}\right]$.

$$\begin{cases}\mu\left(\dfrac{d\vec{V}}{dt}+\left[\vec{\Omega}\times\vec{V}\right]\right)=\vec{F}\\ \dfrac{d\vec{M}}{dt}+\left[\vec{\Omega}\times\vec{M}\right]=\vec{K}\end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 = I_{11}\Omega_1 \\ M_2 = I_{22}\Omega_2 \\ M_3 = I_{33}\Omega_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} + \Omega_2 M_3 - \Omega_3 M_2 = K_1 \\ \dfrac{dM_2}{dt} + \Omega_3 M_1 - \Omega_1 M_3 = K_2 \\ \dfrac{dM_3}{dt} + \Omega_1 M_2 - \Omega_2 M_1 = K_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{11}\dfrac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_2 \Omega_3 \left(I_{33} - I_{22}\right) = K_1 \\ I_{22}\dfrac{d\Omega_2}{dt} + \Omega_3 \Omega_1 \left(I_{11} - I_{33}\right) = K_2 \\ I_{33}\dfrac{d\Omega_3}{dt} + \Omega_1 \Omega_2 \left(I_{22} - I_{11}\right) = K_3 \end{cases}$$

Вопрос для экзамена.

Положим, $\vec{M} = I\vec{\Omega}$ и есть уравнение движения $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \Theta} = 0$. Далее получим уравнения Эйлера; в них скорости Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 можно выразить через эйлеровы углы, например $\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\Theta$. Таким образом, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение тела.

Внимание, вопрос: приводятся ли одни уравнения движения к другим?

Для симметрического волчка:

$$\begin{cases} I_{11}\dfrac{d\Omega_2}{dt} + \Omega_2 \Omega_3 \left(I_{33} - I_{11}\right) = 0 \\ I_{11}\dfrac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_3 \Omega_1 \left(I_{11} - I_{33}\right) = 0 \\ \Omega_3 = const \end{cases} \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{I_{11}} \\ \dfrac{1}{I_{11}} \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \Omega_3 = const \\ \Omega_2 = \Omega_0 \cos\left(a\Omega_3 t + \alpha\right) \\ \Omega_1 = -\dfrac{\dot{\Omega}_2}{a\Omega_3} = \Omega_0 \sin\left(a\Omega_3 t + \alpha\right) \end{cases}, \alpha = 1 - \frac{I_{33}}{I_{11}}$$

В лабораторной системе координат:

$$\begin{cases} \Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\Theta \\ \Omega_0 \cos\left(a\Omega_3 t + \alpha\right) = -\dot{\Theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\Theta\cos\psi \\ \Omega_0 \sin\left(a\Omega_3 t + \alpha\right) = \dot{\Theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\Theta\sin\psi \end{cases}$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \phi\cos\Theta$$

$\Omega_0^2 = \dot{\Theta}^2 + \dot{\phi} \sin^2 \Theta$

Рассмотрим случай, когда $\vec{M} = const$ и $\vec{M} \uparrow\uparrow z$

$M_3 = I_{33}\Omega_3 = const = M_z \cos\Theta \Rightarrow \Theta = const = \Theta_0$

$\Omega_0 = \dot{\phi} \sin\Theta_0 \Rightarrow \dot{\phi} = const = \dfrac{\Omega_0}{\sin\Theta_0}$

$\dot{\psi} = const$

Таким образом, волчок равномерно вращается вокруг осей z и x_3 .

Если $\vec{M} \not\uparrow\uparrow z$, то движение будет более сложным (как это рисовалось ранее).